УДК 512.86

Сатаров Жоомарт, д.ф.-м.н., профессор,
Жолдошова Чебире Буркановна, преподаватель,
Бексариева Жамал Жапаркуловна, преподаватель,
Ошский технологический университет

О ВЕКТОРНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМ КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ

В заметке классическая теория Кронекера-Капелли о системах линейных уравнений над телом обобщается на случай векторных коэффициентов.

Ключевые слова: векторное пространство, вектор-столбец, стандартные наборы, столбовой ранг, строчечный ранг.

Сатаров Жоомарт, ф.-м.и.д., профессор,
Жолдошова Чебире Буркановна, окутуучу,
Бексариева Жамал Жапаркуловна, окутуучу,
Ошский технологический университет

КРОНЕКЕР-КАПЕЛЛА ТЕОРЕМАСЫНЫН ВЕКТОРДУК ЖАЛПЫЛАНЫШЫ ЖӨНҮНДӨ

Жумушта телонун үстүндө сызыктуу теңдемелер системасы жөнүндөгү Кронекер-Капелланын классикалык теоремасы вектордук коэффициенттер учурларына жалпыланат.

*Негизги сөздөр**:** вектордук мейкиндик, вектор-мамыча, стандарттык топтомдор, мамычалык ранг, жолчолук ранг.*

Satarov Joomart, doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Zholdoshova Chebire Burkanovna, Satarov Joomart – Doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Zholdoshova Chebire Burkanovna, lecturer,
Beksarieva Zhamal Zhaparkulovna, lecturer,
Osh Technological University,
Beksarieva Zhamal Zhaparkulovna, lecturer,
Osh Technological University

ON THE VECTOR GENERALIZATION OF THE KRONECKER-CAPELLI THEOREMS

In this note, the classical Kronecker-Capelli theory of systems of linear equations over a body is generalized to the case of vector coefficients.

Key words: vector space, column vector, standard sets, column rank, line rank.

Нашей целью в этой заметке является обобщение классической теоремы Кронекера-Капелли о системах линейной уравнений (СЛУ) на случаи векторных коэффициентов. Пусть $V-$правое векторное пространство над телом Т. Рассмотрим над ними систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m, \end{cases} \qquad (*)$$

где a_{ij} и b_i - некоторые векторы из V, а x_j же (неизвестные) скаляры из T. Составив столбцы

$$\begin{pmatrix} a_{ij} \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix} = a^j \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} = b,$$

систему (*) эквивалентным образом можно заменить с уравнением

$$a^1x_1 + a^2x_2 + \ldots + a^nx_n = b. \quad (**)$$

Пусть $V(^m)$ означает правое векторное пространство (над T) вектор-столбцов высоты m с компонентами из пространства V. Очевидно, система векторов

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_m \end{pmatrix}$$

из этого пространства будет линейно-независимой, если линейно-независима хотя бы одна из ее „строк''

$$(a_i, b_i, \ldots, c_i), \quad 1 \le i \le m.$$

Другими примерами линейно-независимых систем могут послужить „стандартные'' наборы

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ c_m \end{pmatrix}$$

с ценулевыми компонентами $(a_1, b_2, \ldots, c_m)$. Под (столбцовым) рангом системы векторов $d_1, \ldots, d_k$ из $V(^m)$ как всегда, понимается (инвариантное для этой системы) число векторов ее максимальных линейно-независимых подсистем. Этот ранг мы обозначим как $(d_1, \ldots, d_k)r.$ Очевидно, он не превышает k. Далее, если вектор x линейно выражается через систему $d_1, \ldots, d_k$, то это коротко мы условимся записывать как $x(LE)(d_1, \ldots, d_k).$

Относительно (*) имеет место

Теорема 1 (Кронекера-Капелли, правая). Векторная СЛУ (*) будет совместной тогда и только тогда, когда для нее

$$(a^1, \ldots, a^n)r = (a^1, \ldots, a^n, b)r = r_r. \qquad (=)$$

При наличии условия (=), если еще $r_r = n,$ то система (*) является определенной, а если же $r_r < n,$ то она будет неопределенной.

Доказательство. Пусть система (*) совместна. Тогда уравнение (**) будет иметь решения. А это влечет за собой

$$b(LE)(a^1,...,a^n) \to (a^1,...,a^n,b)r \le (a^1,...,a^n)r$$

и последнее в объединении с

$(a^1,...,a^n)r \le (a^1,...,a^n,в)r$ дает нам и (=).

Пусть теперь имеет место совпадение (=). Очевидно, так может быть только тогда, когда

$b(LE)(a^1,...,a^n)$ (ибо противный случай дает нам

$$(a^1,...,a^n)r < ((a^1,...,a^n,b)r),$$

т.е. когда имеет место равенство (**) при некоторых $x_1,...,x_n \in T.$ Это в свою очередь приведет нас к заключению о совместности системы (*).

Переходим ко второй части теоремы. Пусть для (*) выполнено условие (=). Если здесь $r_r = n,$ то так может быть только при линейно независимых $a^1,...,a^n.$ Последнее влечет за собой единственность решения уравнения (**). Поскольку (**) и (*) равносильны, определенной будет, тогда, и система (*).

Пусть теперь для (*) имеет место случай $r_r < n.$

Здесь, очевидно, система $a^1,...,a^n$ будет линейно зависимой, поэтому она допускает разложение $0 = a^1y_1 + ... + a^ny_n$ с некоторым коэффициентом $y_i \ne 0(1 \le i \le n)$. Теперь последнее в объединения с (**) дает нам

$$a^1(x_1 + y_1) + ... + a^n(x_n + y_n) = b + 0 = b. \quad (b+0)$$

Поскольку в разложении $(b+0)$ компонента $x_i + y_i \ne x_i$ (ибо $y_i \ne 0$), оно будет отличным от $(**)$, т.е. уравнение $(**)$ является неопределенным. Тогда неопределенной будет и система $(*)$ (ибо $(*) \leftrightarrow (**)$). Теорема 1 доказана.

Аналогичным образом можно решить вопрос и о левых СЛУ. Пусть теперь U означает левое векторное пространство над (тем же) телом Т. Рассмотрим над ними систему.

$$\begin{cases} x_1a_{11} + x_2a_{21} + ... + x_ma_{m1} = b_1 \\ \dotfill \\ x_1a_{1n} + x_2a_{2n} + ... + x_ma_{m4} = b_n \end{cases} \quad (*')$$

$(a_{ij}, b_j \in U, x_i \in T).$ Обозначим через $U(_n)$ левое векторное пространство всех вектор-строк длины n с элементами из U. Если ввести обозначения $(a_{i1},..., a_{in}) = a_i$ и $(b_1,...,b_n) = b,$ то система $(*')$ будет эквивалентна уравнению

$$x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_ma_m = b.$$

(Строчечный) ранг системы векторов $d_1,..., d_k$ из $U(_n)$ здесь мы обозначим как $r(d_1,..., d_k).$ Ясно, что и этот ранг не превосходит k.

Дуальное повторение рассуждений, проделанных для системы $(*)$, и здесь приводит нас к следующему результату.

Теорема 2 (Кронекера-Капелли, левая). Левая СЛУ $(*')$ будет совместной тогда и только тогда, когда для нее

$$r(a_1,..., a_m) = r(a_1,..., a_m, b) = r_l. \quad (=')$$

При выполнении условия $(=')$ система $(*')$ будет определенной при $r_l = m$ и является неопределенной при $r_l < m$..

Очевидно, если в системах $(*)$ и $(*')$ положить $V = U = T,$ то (соответствующие им) теоремы 1 и 2 обретут хорошо знакомые нам классические формы, т.е. скалярные случаи в $(*)$ и $(*')$ на случаи векторных коэффициентов распространяются беспрепятственно. Однако же между названными случаями возникают и определенние расхождения (например, при вычислении рангов основных матриц из $(*)$ и $(*')$).

Как мы хорошо знаем, в скалярных случаях для матрицы $a = (a_{ij})$ имеет место равенство $r(a) = (a)r.$ Но в векторных же случаях так будет далеко не всегда. Приводим пример, подтверждающий сказанное. Пусть для единичной матрицы e порядка $n \geq 2$ (и с элементами из T) e_i и e^j означают ее $i-$ую строку и $j-$ый столбец) $(1 \leq i, j \leq n)$. Рассмотрим над (левым) пространством $U = T^n$ систему из одного уравнения

$$x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n = b, \qquad (e)$$

где $b-$ некоторая строка из T^n. Для этой системы очевидно неравенство

$$r(e) = n > 1 = (e)r. \quad (n > 1)$$

Транспонируя равенство (e), мы приходим к правой системе (также из одного уравнения)

$$e_1'x_1 + e_2'x_2 + ... + e_n'x_n = b' \quad (e')$$

над столбцовым пространством $(T^n)' = V.$ Поскольку $e' = e,$ неравенство $(n > 1)$ дает нам ранговое соотношение основной матрицы и для системы (e').

Литература:

1. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры, [Текст] // “Наука’’, 1970.
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. [Текст] // Высшая школа’’, 1979.
3. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру [Текст] // “Наука’’, 1973.

УДК 517.956

Артыков Аамат Жакышович, к.ф.-м.н., доцент,
Ошский технологический университет,
Атабаев Султанмахмут Коңурбаевич,ст.преподаватель
Ошский технологический университет
E-mail: aamat62@mail.ru, atabaev.70@Listl.ru

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В работе исследован что, если функция $f(t,x,u)$ аналитическая функция по аргументам u то, применяя вычетный метод показана что, при α >1 задача (1) либо имеет единственное периодическое решение, либо множество периодических решений с периодом T по t и x разлагающихся по целым и дробным степеням параметра ε .

Ключевые слова: нелинейных диффереациальных уравнений в частных производных первого порядка, аналитическая функция, периодическое решение.