УДК 517.968

Мамбетов Жоомарт Иманалиевич, к.ф.-м.н., доцент,
Топчубек кызы Сырга, магистрант,
Ошский технологический университет

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ ПРОИЗВОДНЫХ

В данной работе найдены методом дополнительного аргумента в сочетании с методом введения дополнительных неизвестных функций достаточные условия существования решений начальной задачи для одной системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка со многими пространственными переменными.

Ключевые слова: Система уравнений, дифференциальное, диагональная матрица, частные производные, метод дополнительного аргумента, вектор-функция.

Мамбетов Жоомарт Иманалиевич, ф.-м.и.к, доцент,
Топчубек кызы Сырга, магистрант,
Ошский технологический университет

ТУУНДУЛАРДЫН ДИАГОНАЛДЫК МАТРИЦАСЫ БАР ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН БИР СИСТЕМАСЫ ҮЧҮН КОШУМЧА АРГУМЕНТ КИЙИРҮҮ УСУЛУН КОЛДОНУУ

Бул эмгекте биз кошумча аргумент кийирүү методун кошумча белгисиз функцияны кийирүү ыкмасы менен айкалыштырып көп мейкиндик өзгөрмөлүү биринчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин системасы үчүн баштапкы маселенин чечимдеринин жашашынын жетиштүү шарттары табылган.

Негизги сөздөр: Теңдемелер системасы, дифференциалдык, диагоналдык матрица, жекече туундулар, кошумча аргументкийирүү методу, вектордук функция.

Mambetov Joomart Imanalievich, candidate of physical
and mathematical sciences, assistant professor,
Topchubek kyzy Syrga, graduate student,
Osh technological university

APPLICATION OF THE METHOD OF ADDITIONAL ARGUMENT FOR ONE SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES WITH A DIAGONAL MATRIX OF DERIVATIVES

In this paper, we find sufficient conditions for the existence of solutions to the initial problem for a system of first-order partial differential equations with many spatial variables by the method of an additional argument in combination with the method of introducing additional unknown functions.

Key words: System of equations, differential, diagonal matrix, partial derivatives, additional argument method, vector function.

Задачи построения решения системы дифференциальных уравнений в частных производных рассмотрены в работах А.Ж. Аширбаевой, Ж.И Мамбетова [1-3]. В этих работах построено решение с одинаковым нелинейным сомножителем.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a_i(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x_j}= f_i(t,x), i=1,...,n, \qquad (1)$$

$(t,x)\in Q_1{}^n(T),$

$Q_m^n(T)=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_m,x)\big|0\le t_1\le t_2\le t_3\le ...\le t_m\le T,\ x\in R^n\},$

с начальными условиями:

$$u_i(0,x)=\varphi_i(x),\quad x\in R^n,\quad \varphi_i(x)\in \overline{C}^1(R^n), i=1,...,n, \qquad (2)$$

где $a_i(t,x),\ f_i(t,x)$ - заданные функции.

Теорема . Пусть $a_i(x)\in \overline{C}^{(1)}(R^n),\quad i=1,...,n,\ f_i(t,x)\in \overline{C}^{(1)}(Q_1{}^n(T)).$ Тогда система дифференциальных уравнений (1)-(2) имеет единственное решение в пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1{}^n(T)).$

Обозначим

$$N=\sup\{\Big|\ \frac{\partial a_1(x)}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2(x)}{\partial x_2}+...+\frac{\partial a_{n1}(x)}{\partial x_n}\ \Big|: x\in R^n\}. \qquad (3)$$

Введем обозначения:

$$W(t,x;u)=\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x_2}+...+\frac{\partial u_n(t,x)}{\partial x_n}, \qquad (4)$$

$$\psi(x)=\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1}+\frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_2}+...+\frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_n}.$$

Тогда из (1) имеем

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a_i(x)W(t,x;u)= f_i(t,x),\quad i=1,...,n. \qquad (5)$$

Дифференцируем первое уравнение (5) по x_1, второе - по $x_2,...,n$-е по x_n, получаем

$$\frac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial t\partial x_i}+\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i}W(t,x;u)+a_i(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_i}=\frac{\partial f_i(t,x)}{\partial x_i},\quad i=1,...,n \qquad (6)$$

Отсюда, суммируя правые и левые части, получаем

$$\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial t}+a_1(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_1}+a_2(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_2}+...+a_n(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_n}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i}W(t,x;u)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(t,x)}{\partial x_i}.$$

Введем обозначения:

$$-A(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i}, G(t,x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(t,x)}{\partial x_i}. \qquad (7)$$

Тогда получаем:

$$\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial t}+a_1(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_1}+a_2(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_2}+...+a_n(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_n}= \qquad (8)$$

$$=A(x)\cdot W(t,x;u)+G(t,x).$$

Имеем:

$$W(0,x;u)=\psi(x). \qquad (9)$$

Итак, мы привели систему дифференциальных уравнений (1) с начальным условием (2) к дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка (8) с начальным условием (9). Видно, что функция *W* полностью определяется исходными данными задачи и не зависит от функции *u*.

Применяя метода дополнительного аргумента (МДА) для задачи (8)–(9), получаем:

$$W(t,x;u)=\psi(p(0,t,x))+\int_0^t A(\nu,p(\nu,t,x))W(\nu,p(\nu,t,x)))d\nu+$$
$$+\int_o^t G(\nu,p(\nu,t,x))d\nu, \qquad (10)$$

где $p(s,t,x)=(p_1(s,t,x),...,p_n(s,t,x))$ - решение системы интегральных уравнений (ИУ)

$$p_i(s,t,x)=x_i-\int_0^t a_i(p_i(\nu,t,x))d\nu,(s,t,x)\in Q_2{}^n(T), \quad i=1..n. \qquad (11)$$

Система ИУ (11) с $a_i(x)\in \overline{C}^{(1)}(R), i=1..n$ как система слабо нелинейных уравнений типа Вольтерра имеет единственное решение, и оно удовлетворяет соотношению $p_i(s,s,x)=x_i$.

Из (11) вытекает соотношение

$$\frac{\partial p_i(s,t,x)}{\partial x_1}+a_1(x)\frac{\partial p_i(s,t,x)}{\partial x_2}+...+a_n(x)\frac{\partial p_i(s,t,x)}{\partial x_n}=0,(s,t,x)\in Q_2{}^n(T). \qquad (12)$$

Введем в $\overline{C}(Q_1{}^n(T))$ норму

$$\|W(t,x)\|_\lambda=\sup\{|W(t,x)|e^{-\lambda t}:(t,x)\in Q_1{}^n(T)\}, \lambda>0. \qquad (13)$$

Тогда $|W(t,x)|\le\|W(t,x)\|e^{\lambda t}$.

Имеем:

$$\|F(t,x;W_1)-F(t,x;W_1)\|_\lambda=\|\int_0^t A(p(\nu,t,x))(W_1(\nu,p(\nu,t,x))-W_2(\nu,p(\nu,t,x)))d\nu\|\le$$

$$\le\left\|\int_0^t N\|W_1-W_2\|e^{\lambda\nu}d\nu\right\|_\lambda\le\left\|\frac{1}{\lambda}Ne^{\lambda t}\right\|_\lambda=\frac{1}{\lambda}N.$$

Отсюда следует, что при $\lambda=2N+1$ оператор *F* является сжимающим.

Таким образом, ИУ (10) имеет единственное решение $W(t,x)$.

Подставляя $W(t,x)$ в уравнение (3) и интегрируя обе части уравнения по *t*, получаем равенства для определения искомой вектор-функции $u(t,x)=(u_1(t,x),...,u_n(t,x))$.

$$u_i(t,x)=\varphi_i(x)-\int_0^t a_i(x)W(s,x)ds+\int_0^t f_i(s,x)ds, \quad i=1,...,n.$$

Отсюда следует существование и единственность решения задачи (1)-(2). Теорема доказана.

Литература:

1. **Аширбаева, А.Ж.** Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными [Текст] / Ж.И. Мамбетов // Международный научно-исследовательский журнал. 2018. – № 3(69). – С. 6-10.
2. **Мамбетов, Ж.И.** Построение решений системы нелинейных интегродифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с вырожденным ядром [Текст] / Ж.И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. – Ош, 2017. – № 4. - С. 113–116.
3. **Mambetov, Zh.** Method of additional argument for system of non-linear partial differential equations of the first order [Текст] / A.Ashirbaeva, Zh.Mambetov // Abstracts of VI Congress of the Turkic World Mathe-matical Society, October 2-5, 2017 Astana, Kazakhstan / Ed. by Acad. B.T. Zhumagulov. – P. 37.