УДК 517.968

Аширбаева Айжаркын Жоробековна,
д.ф.-м.н., профессор,
Мамбетов Жоомарт Иманалиевич, к.ф.-м.н., доцент,
Топчубек кызы Сырга, магистрант,
Ошский технологический университет

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ОДИНАКОВЫМ СОМНОЖИТЕЛЕМ МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Рассмотрена система нелинейных интегро- дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковым сомножителем. Методом дополнительного аргумента доказано существование единственного решения начальной задачи. Рассмотрен конкретный пример и построено решение поставленной задачи.

Ключевые слова: Система уравнений, интегро-дифференциальное, нелинейное, частные производные, метод дополнительного аргумента, вектор-функция, сжатое отображение.

Аширбаева Айжаркын Жоробековна,
ф.-м.и.д., профессор,
Мамбетов Жоомарт Иманалиевич, ф.-м.и.к, доцент,
Топчубек кызы Сырга, магистрант,
Ошский технологический университет

БИРДЕЙ КӨБӨЙТҮҮЧҮСҮ МЕНЕН ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫН КОШУМЧА АРУМЕНТ КИЙИРҮҮ УСУЛУ МЕНЕН ЧЕЧҮҮ

Бирдей көбөйтүүчүсү менен жекече туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык тендемелер системасы каралган. Кошумча арумент кийирүү усулу менен баштапкы маселенин жалгыз чечиминин жашашы далилденген. Айкын мисал каралган жана коюлган маселенин чечими тургузулган.

Негизги сөздөр: Теңдемелер системасы, интегро-дифференциалдык, сызыктуу эмес, жекече туундулар, кошумча аргумент кийирүү усулу, вектор-функция, кысып чагылтуу.

Ashirbaeva Aizharkyn Zhorobekovna,
doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Mambetov Joomart Imanalievich- candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,
Topchubek kyzy Syrga, graduate student,
Osh technological university

SOLUTION OF THE SYSTEM OF NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PRIVATE DERIVATIVES WITH THE SAME COMBINER BY AN ADDITIONAL ARGUMENT METHOD

A system of nonlinear partial differential integral-differential equations with the same factor is considered. By the method of an additional argument, the existence of a unique solution to the initial problem is proved. A concrete example is considered and a solution to the problem is constructed.

Key words: System of equations, integral-differential, nonlinear, partial derivatives, additional argument method, vector function, compressed map.

Исследование многих физических задач приводятся к системам дифференциальных уравнений в частных производных. Применение метода дополнительного аргумента при решении таких систем уравнений является актуальной задачей. Полученные результаты данной работы обобщают ранее полученные результаты в [1-2].

В данной работе рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}= f_i(t,x,u_1,u_2,...,u_n)+\int_0^1 K_i(t,s)u_i(t,s)ds, \qquad (1)$$

$(t,x)\in Q_1(T)=[0,T]\times R^+, \quad R^+=[0,X].$

при начальном условии

$$u_i(0,x)=\varphi_i(x), \quad x\in R^+, \quad \varphi_i(x)\in \overline{C}^1(R^+), \quad i=1,...,n, \qquad (2)$$

где $\overline{C}^k(\Omega)-$пространства функций, определенных, непрерывных и ограниченных соответственно вместе со всеми своими производными до порядка *k*.

Теорема. Если

$$f_i(t,x,u_1,u_2,...,u_n)\in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n), \quad i=1,2,..,n, \quad \int_0^X |K_i(t,s|ds\le \gamma = const,$$

то существует такое $0<T_*\le T$, что задача (1)-(2) имеет единственное решение в пространстве $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

Доказательство. Из условия теоремы - ограниченности первых производных - следует, что функции φ и f удовлетворяют условию Липшица. Введем соответствующие обозначения: для $i=1,2,..,n$ функции $\varphi_i(x)\in Lip(L_i)$, и $f_i(t,x,u_1,u_2,...,u_n)\in Lip(M_0^i|_x, M_1^i,$

$Lip(N|_u,M|_v,...)$ – класс функций из [3].

Доказательство теоремы произведем с помощью следующих лемм.

Лемма 1. В пространстве $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$ задача (1)-(2) эквивалентна системе интегральных уравнений (ИУ):

$$u_i(t,x)=\varphi_i(p(0,t,x))+\int_0^t\int_0^1 K_i(\tau,s)u_i(\tau,s)dsd\tau +$$

$$+\int_0^t f_i(\tau,p(\tau,t,x),u_1(\tau,p(\tau,t,x)),u_2(\tau,p),...,u_n(\tau,p))d\tau \qquad (3)$$

$$p(s,t,x)=x-\int_s^t u_1(\nu,p(\nu,t,x))d\nu, \qquad (4)$$

$(s,t,x)\in Q_2(T)=\{(s,t,x)|\ 0\le s\le t\le T,\ x\in R\}, \quad i=1,2,\dots,n.$

Доказательство леммы 1. Применяя метод дополнительного аргумента (МДА) для задачи (1)-(2), сводим задачу к системе ИУ (3)-(4) (см. [1-3]).

Пусть теперь $u_i(t,x),\ p(s,t,x),\quad i=1,2,..,n,$ - решение системы ИУ (3)-(4).

Тогда функции $u_i(t,x),\quad i=1,2,..,n$ удовлетворяют уравнению (1) и начальному условию (2).

В самом деле, из (3) имеем:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}=\varphi_i'(p(0,t,x))\left[\frac{\partial p(0,t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial p(0,t,x)}{\partial x}\right]+$$

$$+\int_0^t\left[f_{i_x}+f_{i_{\vartheta_1}}u_{1x}+..+f_{i_{\vartheta_n}}u_{nx}\right]\left[\frac{\partial p(\tau,t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial p(\tau,t,x)}{\partial x}\right]d\tau+$$

$$+f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x))+\int_0^1 K_i(t,s)u_i(t,s)ds.$$

Отсюда в силу соотношения $\dfrac{\partial p(s,t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\dfrac{\partial p(s,t,x)}{\partial x}$=0, которое получается из (4), из последнего получается уравнение (1).

Лемма 2. Система ИУ (3)-(4) имеет единственное решение.

Доказательство леммы. Преобразуем ИУ (3), заменяя в нем t через s, x на $p(s,t,x)$ и используя равенство, доказанное в работе Аширбаевой А.Ж., ко-торое можно назвать «тождеством транзитивности МДА»:

$$p(s,t,p(t,\theta,x))=p(s,\theta,x), \tag{5}$$

$$(s,t,\theta,x)\in Q_3(T)=\{(s,t,\theta,x)|\ 0\le s\le t\le\theta\le T,\ x\in R\}.$$

Тогда из (3), (4) имеем:

$$\omega_i(s,t,x)=\varphi_i(p(0,t,x))+\int_0^t\int_0^1 K_i(\tau,s)u_i(\tau,s)dsd\tau+$$

$$\int_0^s f_i(\tau,p(\tau,t,x),\omega_1(\tau,t,x),\omega_2(\tau,t,x),...,\omega_n(\tau,t,x))d\tau, \tag{6}$$

$$p(s,t,x)=x-\int_s^t\omega_1(\nu,t,x)d\nu,\quad i=1,2,...,n, \tag{7}$$

где обозначено

$$\omega_i(s,t,x)=u_i(s,p(s,t,x)),\qquad i=1,2,...,n. \tag{8}$$

Подставляя (7) в (6), получаем

$$\omega_i(s,t,x)=\varphi_i(x-\int_0^t\omega_1(\nu,t,x)d\nu)+\int_0^t\int_0^1 K_i(\tau,s)u_i(\tau,s)dsd\tau \tag{9}$$

$$+\int_0^s f_i(\tau,x-\int_\tau^t\omega_1(\nu,t,x)d\nu,\omega_1(\tau,t,x),\omega_2(\tau,t,x),...,\omega_n(\tau,t,x))d\tau,\quad i=1,2,...,n..$$

Система ИУ (9) при $t=\tau$ совпадает с системой ИУ (3). Согласно (8) имеем $\omega_i(t,t,x)=u_i(t,x),\quad i=1,2,...,n.$

Итак, достаточно доказать существование решение системы ИУ:

$$\omega_i(s,t,x)=\varphi_i(x-\int_0^t\omega_1(\nu,t,x)d\nu)+\int_0^t\int_0^1 K_i(\tau,s)\omega_i(\tau,\tau,s)dsd\tau \tag{10}$$

$$+\int_0^s f_i(\tau, x - \int_\tau^t \omega_1(\nu,t,x)d\nu, \omega_1(\tau,t,x), \omega_2(\tau,t,x),...,\omega_n(\tau,t,x))d\tau, \quad i = 1,2,...,n..$$

Запишем систему ИУ (10) в виде одного векторного уравнения

$$\theta(s,t,x) = A(s,t,x;\theta), \qquad (11)$$

в котором $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$ - вектор-функция переменных (s,t,x), компоненты которой есть искомые функции $\theta_1 = \omega_1(s,t,x)$, $\theta_2 = \omega_2(s,t,x)$, …, $\theta_n = \omega_n(s,t,x)$, а компоненты оператора $A = (A_1, A_2, ..., A_n)$ определяются равенствами:

$$A_i(s,t,x;\theta) = \varphi_i(x - \int_0^t \theta_1(\nu,t,x)d\nu) + \int_0^t\int_0^1 K_i(\tau,s)\omega_i(\tau,\tau,s)dsd\tau +$$

$$\int_0^s f_i(\tau, x - \int_\tau^t \theta_1(\nu,t,x)d\nu, \theta_1(\tau,t,x), \theta_2(\tau,t,x),...,\theta_n(\tau,t,x))d\tau, \quad i = 1,...,n.$$

Введем в $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$ норму

$$\|\theta\|_n = \max\left\{\sup\left\{|\theta_i(t,x)| : (t,x) \in Q_1(T_*)\right)\right\} : i = 1,...,n\right\}. \qquad (12)$$

Покажем, что уравнение (10) имеет в пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1(T\,*))$ при некотором $T* < T$ единственное решение, удовлетворяющее неравенству $\|\theta\|_n \le M = const.$

Имеем:

$$\|A(\theta)\|_n = \max\{\|A_i(\theta)\| : i = 1,...n\} \le \max\{\|\varphi_i\| + T\|f_i\| + \gamma M : i = 1,...n\} = M_1.$$

Оператор A отображает шар $S(0,M)$ в себя.

Теперь возьмем произвольные два элемента $\theta^1, \theta^2 \in S(0,M)$ и оценим норму разности между их образами $A(\theta^1), A(\theta^2)$. Обозначим компоненты элементов θ^1, θ^2 через $\theta_i^1, \theta_i^2, \quad i = 1,...,n.$

Справедливы следующие оценки

$$\left|A_i\theta^1 - A_i\theta^2\right| \le \Omega_i(T)\left\|\theta^1 - \theta^2\right\|,$$

где $\Omega_i(T) = (L_i + M_1^i + ... + M_N^i + \gamma)T + M_0^i \dfrac{T^2}{2}.$

Отсюда следует, что оператор A при $T^* = \min\{\, \Lambda(\mathrm{T}; \Omega_i(T) : i = 1,...,n\}$ осуществляет сжатое отображение шара $S(0,M)$ на себя. Следовательно, по принципу сжимающих отображений уравнение (10) имеет одно и только одно решение.

Рассмотрим конкретный пример.

Пример . Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = u_2(t,x) - x + 1, \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = u_1(t,x) + 1 + t, \end{cases} \qquad (13)$$

с начальными условиями

$$u_1(0,x) = 1, \quad u_2(0,x) = x, \;\; x \in R. \qquad (14)$$

Сначала решаем второе уравнение системы (13) МДА.

$$u_2(t,x) = x - \int_0^t u_1(v, p(v,t,x))dv + \int_0^t u_1(v, p(v,t,x))dv + t + \frac{t^2}{2}.$$

Отсюда

$$u_2(t,x) = x + t + \frac{t^2}{2}.$$

Подставляя решение в первое уравнение системы, имеем:

$$\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = t + \frac{t^2}{2} + 1. \qquad (15)$$

Применяя МДА для задачи (15), (14) получаем решение:

$$u_1(t,x) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}.$$

В данной работе найдены методом дополнительного аргумента достаточные условия существования единственного решения начальной задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Литература:

1. **Аширбаева, А.Ж.** Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента // Естественные и математические науки в современном мире [Текст] / Ж.И. Мамбетов // Новосибирск, 2017. - № 1(48). - С.111-124.
2. **Аширбаева, А.Ж.** Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана [Текст] / Ж.И. Мамбетов // Бишкек, 2017. – № 5. – С. 87–90.
3. **Аширбаева, А.Ж.** Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / Э.А. Мамазиаева // Вестник КРСУ. 2015. –Т.15 –№5. – С. 61–64.