УДК 519.86

Жумабай кызы Жазгул, магистрант,
Маманова Кадича, магистрант,
Ошский технологический университет

МОДЕЛИРОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрены конкретные задачи безусловной и условной оптимизации. Построены решения нелинейной задачи оптимизации.

Ключевые слова: Безусловная оптимизация, условная оптимизация, нелинейная задача, матрица Гессе, критерий Сильвестра.

Жумабай кызы Жазгул, магистрант,
Маманова Кадича, магистрант,
Ош технологиялык университети

СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ОПТИМИЗАЦИЯНЫ КОЛДОНУУ МЕНЕН ЭКОНОМИКАЛЫК МАСЕЛЕЛЕРДИ МОДЕЛДЕШТИРҮҮ ЖАНА ЧЕЧҮҮ

Шарттуу жана шартсыз оптимизациянын маселелери каралган. Сызыктуу эмес оптимизация маселелеринин чечимдери тургузулган.

Негизги сөздөр: Шартсыз оптимизация, шарттуу оптимизация, сызыктуу эмес маселе, Гессенин матрицасы, Сильвестрдин критерийи.

Zhumabay kyzy Zhazgul, graduate student,
Mamanova Kadicha, graduate student,
Osh technological university

MODELING AND SOLVING ECONOMIC PROBLEMS USING A NONLINEAR OPTIMIZATION MODEL

Specific tasks of unconditional and conditional optimization are considered. Solutions to the nonlinear optimization problem are constructed.

Key words: Unconditional optimization, conventional optimization, non-linear problem, the Hessian matrix, the criterion of Sylvester.

Оптимизация как раздел математики изучает процесс или последовательность операций, позволяющих получить уточненное решение [1,3]. Развивается математический аппарат оптимизации. Проводятся глобальный поиск оптимального решения. Решения прикладных задач нелинейной оптимизации сложны.

В данной работе рассмотрены конкретные задачи нелинейной безусловной и условной оптимизации.

Рассмотрим пример для безусловной задачи нелинейной оптимизации: Условная компания «Береке» производит продукции четырех видов x_1, x_2, x_3, x_4. Продукции реализуются по цене $6-x_1$, $16-x_2$, $54-2x_3-x_2$, $5-2x_4$ соответственно.

Целевая функция данной задачи:

$$F = (6 - x_1)x_1 + (16 - x_2)x_2 + (54 - 2x_3 - x_2)x_3 + (5 - 2x_4)x_4 =$$
$$= 6x_1 + 16x_2 + 54x_3 + 5x_4 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_4^2 - x_2x_3 \to \max$$

Данная задача является задачей безусловной оптимизации. Найдем стационарные точки (СТ) данной функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6 - 2x_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 16 - 2x_2 - x_3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 54 - 4x_3 - x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = 5 - 4x_4 = 0$$

СТ:

$$\overline{x^o} = (3, \frac{10}{7}, \frac{92}{7}, \frac{5}{4}).$$

Определим характер СТ. Для этого вычислим матрицу вторых производных (матрица Гессе-МГ) в полученной СТ :

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \left. \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \right|_{\overline{x} = x^o}$$

Найдем все угловые миноры:

- если они положительны МГ положительно определена.
- если знаки определенных миноров чередуются, то МГ отрицательно определена.

В нашем случае МГ отрицательно определена:

$$M_1 = |a_{11}| = |-2| < 0 \qquad M_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \qquad M_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -14 < 0,$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 56$$

Следовательно, $\overline{x^o} = (3, \frac{10}{7}, \frac{92}{7}, \frac{5}{4})$ является точкой локального максимума (ТЛМ).

При этом наибольший доход составит: $F(\overline{x^o}) \approx 381{,}5$.

Теперь рассмотрим задачу на условный экстремум. Условное частное предприятия «Сладости» производит продукции двух видов: x_1, x_2 . Готовые продукции реализуются по цене $25-5x_1$, $80-2x_2$ соответственно. По заказу условное частное предприятие может выпустить только 40 ед. продукции x_1, x_2.

Целевая функция данной задачи условной оптимизации имеет вид:

$$F=(25-5x_1)x_1+(80-2x_2)x_2 \to \max$$

с условием

$$x_1+x_2=40$$

Запишем функцию ограничений

$$g(\overline{\mathrm{x}})=40-x_1-x_2,$$

$$g(\overline{x})=0$$

$$n=2,\quad m=1$$

Решаем задачу методом множителей Лагранжа. Для этого сначала построим функцию Лагранжа:

$$L(\overline{x},\lambda)=25x_1+80x_2-5x_1^2-2x_2^2+\lambda(40-x_1-x_2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda\dfrac{\partial g_i}{\partial x_1}=25-10x_1-\lambda=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda\dfrac{\partial g_i}{\partial x_2}=80-4x_2-\lambda=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=40-x_1-x_2=0 \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$55+10x_1-4x_2=0$$

$$\begin{cases} -10x_1+4x_2=55 \\ x_1+x_2=40 \end{cases}$$

$$\overline{x^o}=\left(\frac{105}{14},\frac{455}{14},-\frac{700}{14}\right) \qquad F(\overline{x^o})=1633.3$$

Вычислим МГ в СТ:

$$H=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}=\left.\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -10 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right|_{\overline{\mathrm{x}}=\overline{\mathrm{x}}^0}$$

Находим все угловые миноры:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = -14 < 0 \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -10 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 14 > 0$$ Следовательно,

$\overline{x^o} = (\frac{105}{14}, \frac{455}{14}, -\frac{700}{14})$ - ТЛМ.

Литература:

1. **Вентцель, Е.С.** Исследование операций. Задачи, принципы, методология. [Текст] // М.: Высш. шк.,2001.
2. **Афанасьев, М.Ю.** Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: [Текст] / Б.П. Суворов // Учеб. Пособие. – М.: ИНФА-М, 2003
3. **Волков, И.К.** и др. Введение в исследование операций. [Текст] // М.:Изд-во МГТУ им. Баумана, 2000.