УДК 512.86

Сатаров Жоомарт, д.ф.-м.н., професссор
Мамазиаева Эльмира Амановна, к.ф.-м.н.,
Хамиджанов Ганишер, магистрант,
Ошский технологический университет

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ КВАЗИТРЕУГОЛЬНОЙ ГРУППЫ НАД АССОЦИАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ

В работе выявляются определяющие соотношения квазитреугольной группы над ассоциативным кольцом в ее естественной системе образующих

Ключевые слова: квазитреугольная группа, алфавит, порождающая система, стандартное строение, трансформационные преобразования.

Сатаров Жоомарт, ф.-м.и.д.,профессор
Мамазиаева Эльмира Амановна, ф.-м.и.к.,
Хамиджанов Ганишер, магистрант,
Ош технологиялык университети

АССОЦИАТИВДИК АЛКАКТЫН ҮСТҮНДӨ КВАЗИ ҮЧ БУРЧТУУ ГРУППАНЫН АНЫКТООЧУ КАТЫШТАРЫ

Жумушта ассоциативдик алкактын үстүндө квазиүч бурчтуу группасынын анык табигый жаратуучу системасындагы аныктоочу катыштары табылат

Ачкыч сөздөр: квазиүч бурчтуу группа, алфавит, жаратуучу система, стандарттык түзүлүш, трансформациялык өзгөртүп түзүүлөр

Satarov Zhoomart, Doctor of Phys. and Math., Professor
Mamaziaeva Elmira Amanovna, Cand of Phys. and Math.
Khamidzhanov Ganisher, graduate student,
Osh technological university

DEFINING RELATIONS FOR A QUASI-TRIANGULAR GROUP OVER AN ASSOCIATIVE RINGS

The work reveals the defining relations for a quasi-triangular group over an associative king in its natural system of generations.

Key words: quasi-triangular group, alphabet, generating system, standard structure, transformational, transformations.

В этой работе мы выявляем систему определяющих соотношений квазитреугольной группы $T^0(n,R)$, $n \geq 2$, над ассоциативным кольцом *R* относительно ее естественной порождающей системы.

$$t_{ij}(\alpha),\ \alpha \in R,\ 1 \leq i < j \leq n;\ d_k(\varepsilon),\ \varepsilon \in \mathrm{R}^{\circ}_{,}\ 1 \leq k \leq n. \qquad (*)$$

Напишем предварительно в алфавите (*) следующие ее (непосредственно проверяемые) соотношения:

1. $d_k(\alpha)\circ d_k(\tau)=d_k(\varepsilon\circ\tau);$

2. $d_k(\alpha)\circ d_r(\tau)=d_r(\tau)\circ d_k(\varepsilon),\quad k\neq r;$

3. $t_{ij}(\alpha)\circ t_{ij}(\beta)=t_{ij}(\alpha+\beta);$

4. $t_{ij}(\alpha)\circ t_{ir}(\beta)=t_{ir}(\beta)\circ t_{ij}(\alpha),\ \ r\neq j;$

5. $t_{ij}(\alpha)\circ t_{jr}(\beta)=t_{ir}(\alpha\beta)\circ t_{jr}(\beta)\circ t_{ij}(\alpha);$

6. $t_{ij}(\alpha)\circ t_{kr}(\beta)=t_{kr}(\beta)\circ t_{ij}(\alpha),\ \ i\neq r,\quad j\neq k;$

7. $t_{ij}(\alpha)\circ d_i(\varepsilon)=d_i(\varepsilon)\circ t_{ij}(\varepsilon^{/}\alpha+\alpha);$

8. $t_{ij}(\alpha)\circ d_j(\varepsilon)=d_j(\varepsilon)\circ t_{ij}(\alpha\varepsilon+\alpha);$

9. $d_k(\varepsilon)\circ t_{ij}(\alpha)=t_{ij}(\alpha)d_k(\varepsilon),\ \ k\neq i,j.$

Ниже мы покажем полноту системы соотношений 1-9 для группы $T^0(n,R)$. Этот факт будет установлен методом трансформации, развитым в работах [1]-[4]. Названный метод использует (бинарные) отношения $\overset{i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}}$, $1\leq i<n,$ определенные на множестве всех слов алфавита (*). Эти отношения вводятся как $\omega\overset{i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}}\upsilon$ тогда и только тогда, когда слова *w*, *v* связаны соотношением $\omega=X\circ\nu$, где *X* – некоторое слово, не содержащее буквы вида $t_{k<j}(\alpha),\alpha\neq 0,k\leq i.$ Введенные отношения $\overset{i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}}$ являются рефлексивными и транзитивными.

Ниже в наших рассуждениях базовую роль играет

Теорема 1 (о трансформации букв). Пусть *x* означает одну из букв $t_{kr}(\alpha),\ \alpha\neq 0,\ k\geq i;\ d_q(\varepsilon),\ \varepsilon\neq 0.$ Тогда для любой формы f_i используя соотношения 3-9 можно выполнить преобразование $f_i\circ x\overset{i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}}\tilde{f}_i$, где $\tilde{f}_i$-также некоторая форма ступени *i*.

Доказательство. Напомним, что под упомянутыми выше формами здесь понимаются некоторые комбинации вида $f_i=\prod\limits_{i<j\leq n}^{0}t_{ij}(\alpha_j)=t_{i,i+1}(\alpha_{i+1})\circ t_{i,i+2}(\alpha_{i+2})\circ\ldots\circ t_{in}(\alpha_{in})$. Наше доказательство комбинаторно и различает следующие случаи.

$$I.\ \ x=d_q(\varepsilon).$$

В этом случае используя соотношения 7-9, требуемую форму мы будем иметь так

$$f_i\circ x=\left[\prod_{j<n}^{0}t_{ij}(\alpha_j)\right]\circ\left[t_{in}(\alpha_n)\circ d_k(\varepsilon)\right]=\left[\prod_{j<n}^{0}t_{ij}(\alpha_j)\circ d_k(\varepsilon)\right]\circ t_{in}(\beta_n)=$$

$$=\ldots=d_k(\varepsilon)\circ\prod_{j\leq n}^{0}t_{ij}\beta_j)\overset{i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}}\prod_{j\leq n}^{0}t_{ij}(\beta_j)=\tilde{f}_i.$$

$$II.\ \ x=t_{kr}(\alpha).$$

Здесь мы рассмотрим следующие подслучаи.

a) *k*=*i*. Применение соотношений 6 и 3 в надлежащей последовательности здесь приводит нас к

$$f_i\circ x=\prod_{j\neq r}^{0}t_{ij}(\alpha_j)\circ\left[t_{ir}(\alpha_r)\circ t_{ir}(\alpha)\right]=\prod_{\nu\neq r}^{0}t_{ij}(\alpha_j)\circ t_{ir}(\alpha_r+\alpha)=\prod^{0}t_{ij}(\beta_j)=\tilde{f}_i$$

(в последней записи $\beta_j = \alpha_j$ при $j \neq r$ и $\beta_r = \alpha_r + \alpha$).

в) $k > i$. Здесь мы используя результаты разобранного только что случая *а*), а также соотношения 4-6, аналогичным образом будем иметь

$$f_i \circ x = \prod_{j \neq k}^{0} t_{ij}(\alpha_j) \circ [t_{ik}(\alpha_k) \circ t_{kr}(\alpha)] = \left[\prod_{j \neq k}^{0} t_{ij}(\alpha_j) \circ t_{ir}(\alpha_k \alpha)\right] \circ t_{kr}(\alpha) \circ t_{ik}(\alpha_k) \overset{i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}}$$

$$\overset{i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \left[\prod_{v \neq k}^{0} t_{ij}(\beta_j) \circ t_{kr}(\alpha)\right] \circ t_{kr}(\alpha_k) = t_{ik}(\alpha) \circ \left[\prod_{j \neq k}^{0} t_{ij}(\beta_i) \circ t_{ik}(\alpha_k)\right] \overset{i}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \prod^{0} t_{ij}(\gamma_j) = \tilde{f}_i,$$

т.е. снова приходим к требуемый форме (в этих преобразованиях $\beta_t = \alpha_t$ при $t \neq r$ и $\beta_r = \alpha_r + \alpha_k \alpha$ и $\gamma_t = \beta_t$ при $t \neq k$, $\gamma_k = \alpha_k$ следовательно, аргументы в $\tilde{f}_i$ определены как $\gamma_t = \alpha_t$ при $t \neq r$ и $\gamma_r = \alpha_r + \alpha_k \alpha)$. Теорема 1 доказана.

Пусть $S(w)$ означает каноническую форму слова *w* алфавита (*). Ниже нам потребуется еще и следующая

Теорема 2 (о стандартном строении). Применяя соотношения 1-9 всякое слово *w* алфавита (*) можно привести к каноническому виду $S(w)$.

Доказательство. Не теряя общности слово *w* можно считать представленным в виде

$$\omega \overset{1}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} f_1 \circ X, \qquad (1)$$

где f_1 - некоторая форма ступени 1 и *X* – соответствующее ей дополнение. Пусть $X = x \circ \tilde{X}$, т.е. *x* – первая буква дополнения *X*. Применение к стыку $f_1 \circ x$ трансформационной теоремы 1 приведет нас к

$w \overset{1}{\underset{\sim}{\to}} (f_1 \circ x) \circ \tilde{X} \overset{1}{\underset{\sim}{\to}} \tilde{f}_1 \circ \tilde{X}$, где $\tilde{f}_1$- также некоторая форма ступени 1, т.е. для *w* будем иметь представление того же вида (1), но уже с укороченной длиной дополнения *X*. Выполняя эту процедуру сокращения (дополнения) несколько раз, мы проходим к записи вида $w \overset{1}{\underset{\sim}{\to}} f_1$. Последнее по определению $\overset{1}{\underset{\sim}{\to}}$ означает представляемость рассматриваемого слова в виде $w = X^1 \circ f_1$, где X^1-некоторое слово, не содержащее трансвекции вида $t_{1r}(\alpha)$, $\alpha \neq 0$. Повторяя эту процедуру выделения форм к слову X^1, мы для *w* будем иметь $w = X^2 \circ f_2 \circ f_1$, где слово X^2 уже не содержит трансвекции вида $t_{2r}(\alpha)$, $\alpha \neq 0$ и т.д. Описанный процесс на (*n*-1)-м шаге приведет нас к

$$w = X^{n-1} \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1,$$

где слово X^{n-1} не содержит никакие ненулевые трансвекционные буквы. Применением теперь к нему соотношений 1 и 2 последнее очень просто записывается в виде $d_1(\varepsilon_1) \circ d_2(\varepsilon_2) \circ \ldots \circ d_n(\varepsilon_n)$, т.е. для *w* мы получаем каноническую форму. Теорема 2 также доказана.

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема 3. Квазитреугольная группа $T^0(n, R)$, $n \geq 2$, над ассоциативным кольцом *R* в порождающих (*) задается соотношениями 1-9.

Доказательство. Пусть $w = 0$ - произвольное соотношение группы $T^0(n, R)$ в алфавите (*). Применением к части *w* трансформационную теорему 2 последнее записывается в «каноническом» виде $S(w)$=0. По теореме 1 представление в виде $S(w)$ является однозначным, поэтому аргументы всех букв этой формы обязаны быть равными нулю. А это означает выводимость соотношения w=0 из 1-9. Теорема 3 установлена полностью.

Литература:

1. **Сатаров, Ж.С.** Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы. [Текст] / Ж.С. Сатаров // Изв.вузов. Математика. 2006.№10.С.59-67.
2. **Сатаров, Ж.С.** Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы. [Текст] / Ж.С. Сатаров // Изв. вузов. Математика. 2006. №11. С. 33 – 41.
3. **Сатаров, Ж.С.** Стандартные формы в линейных группах над радикальным кольцом и их приложения [Текст] / Ж.С. Сатаров, Ахунбек к. М. // Известия ОшТУ. 2019. №2. С.33-38.
4. **Сатаров, Ж.С**. Определяющие соотношения в элементарной треугольной группе над кольцами [Текст] / Ж.С. Сатаров // Мат. заметки. 1986. Т. 39. №6. С. 785-790.