УДК 510.891

Сапарова Гульмира Баатыровна, к.ф.-м.н., доцент,
Султан кызы Нурдана - магистрант,
E-mail gulya141005@mail. ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ РИСКА В УСЛОВИЯХ ВНЕШНИХ УГРОЗ

Рассматривается система, которая в процессе своего функционирования подвергается воздействию внешних угроз. Возникновение внешних угроз рассмотрим как некоторый марковский процесс с интенсивностью $\mu(t)$. Система с вероятностью q может обнаружить внешнюю угрозу и в этом случае осуществляет противодействие ей. Процесс противодействия угрозе рассмотрим, как простейший поток событий с интенсивностью $\nu(t)$.

Ключевые слова: система, внешняя угроза, риск, решение, интенсивность, процесс, поток, ущерб, затраты

Сапарова Гульмира Баатыровна, ф.-м.и.к., доцент,
Султан кызы Нурдана, ОшТУнун магистранты,
Ош технологиялык университети

ТЫШКЫ КОРКУНУЧТАРДЫН ШАРТЫНДА ТОБОКЕЛДИКТЕРДИН ДИНАМИКАСЫН МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛДОО

Иштеп жаткан мезгилинде тышкы коркунучтарга дуушар болгон система каралат. Тышкы коркунучтардын пайда болушун $\mu(t)$ интенсивдуулук менен белгилуу марков проццеси катары карап көрөлү. q ыктымалдуулугу бар система тышкы коркунучту аныктай алат жана бул учурда ага каршы турат. Коркунучка каршы туруу процессин $\nu(t)$интенсивдуулук менен окуялардын эн жонокой агымы катары караныз. Тышкы коркунучтун натыйжасында системага зыян келтируу процесси $\eta(t)$ интенсивдуу окуялардын эн жонокой агымы катары каралат

Негизги сөздөр: система, тышкы коркунуч, тобокелдик, чечим, интенсивдуулук, агым, зыян, чыгыша

Saparova Gulmira Baatyrovna - candidate of Physical and mathematical sciences, associate professor,
Sultan kyzy Nurdana – graduate student,
Osh Technological University

MATHEMATICAL MODELING OF RISK DYNAMICS IN THE CONTEXT OF EXTRNAL THEARTS

A system is considered that, in the course of its functioning, is exposed to external threats. Let us consider the emergence of external threats as a certain macro process with intensity$\mu(t)$. The system with probability q can detect an external threat and, in this case, counteracts it. Consider the process of countering the threat as the simplest stream of events with the intensity$\nu(t)$. The process of using the system as a result of the impact of an external threat will be considered as the simplest stream of events with intensity$\eta(t)$.

Key words: system, external threat, risk, decision, intensity, process, flow, damage, expenses

На основе сделанных предположений система в произвольный момент времени может находиться с вероятностью $p_0(t)$ в состоянии нормального функционирования, с вероятностью $p_1(t)$ в состоянии отражения внешней угрозы и с вероятностью $p_2(t)$ в состоянии воздействия внешней угрозы в отсутствии противодействия ей. Система уравнений, описывающая динамику состояний, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = -\mu p_0(t) + \nu p_1(t) + \eta\big(p_1(t) + p_2(t)\big), \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = q\mu p_0(t) - (\nu + \eta)p_1(t), \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = (1-q)\mu p_0(t) - \eta p_2(t). \end{cases} \qquad (1)$$

Будем предполагать, что ущерб, который наносится системе в результате воздействия внешней угрозы при отсутствии противодействия ей, равен $d_2(t)$, а при наличии противодействия - $d_1(t)$. Производительность системы в каждом из состояний характеризуется показателями $w_0(t), w_1(t), w_2(t)$ соответственно.

Тогда уравнение динамики риска может быть записано в виде:

$$\frac{dR(t)}{dt} = d_1(t)\eta p_1(t) + d_2(t)\eta p_2(t),$$

а изменение суммарной прибыли от функционирования системы будет описываться уравнением:

$$\frac{dW(t)}{dt} = w_0(t)p_0(t) + w_1(t)p_1(t) + w_2(p)p_2(t).$$

Заметим, что в понятие ущерба в общем случае включаются затраты, связанные с осуществлением противодействия угрозе, а также с ликвидацией последствий ее воздействия, а введенные показатели удовлетворяют условиям:

$$d_1(t) \ll d_2(t), w_1(t) < w_0(t), w_2(t) < w_0(t).$$

Если учтем, что уровень инфляции в течение времени эксплуатации системы постоянен и равен r, а коэффициент дисконтирования равен i, то представленные показатели ущерба и производительности функционирования системы, соответствующие моменту времени $t > 0$, можно выразить через их значения в момент времени $t = 0$, соответствующий моменту начала эксплуатации системы:

$$d_1(t) = d_1(0)\gamma^t = d_1^{(0)}\gamma^t, d_2(t) = d_2(0)\gamma^t = d_2^{(0)}\gamma^t, w_0(t) = w_0(0)\gamma^t = w_0^{(0)}\gamma^t,$$
$$w_1(t) = w_1(0)\gamma^t = w_1^{(0)}\gamma^t, w_2(t) = w_2(0)\gamma^t = w_2^{(0)}\gamma^t,$$

где $\gamma = \frac{1+r}{1+i}$.

Решение системы уравнений (1) имеет вид:

$$p_0(t) = p_0 + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$
$$p_1(t) = p_1 + \frac{\nu}{\mu + \eta - \lambda_1} C_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{\nu}{\mu + \eta - \lambda_2} C_2 e^{\lambda_2 t},$$
$$\lambda_{1,2} = -\eta - (\mu + \nu)\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1-q)\frac{\mu\nu}{(\mu+\nu)^2}}}{2},$$
$$C_1 = \frac{p_1 + \alpha_2(1-p_0)}{\alpha_2 - \alpha_1},\ C_2 = \frac{p_1 + \alpha_1(1-p_0)}{\alpha_2 - \alpha_1}, \alpha_1 = \frac{\nu}{\mu+\eta-\lambda_1},\ \alpha_2 = \frac{\nu}{\mu+\eta-\lambda_2}.$$

Для рассматриваемой модели функционирования системы, когда в результате внешних воздействий она сохраняет работоспособное состояние, имеет место стационарный режим функционирования, распределение вероятностей состояний для которого описывается соотношениями вида:

$$p_0 = \frac{\nu+\eta}{\nu+\eta+\mu(1+(1-q)\frac{\nu}{\eta})}, p_1 = \frac{q\mu}{\nu+\eta+\mu(1+(1-q)\frac{\nu}{\eta})}, p_1 = \frac{(1-q)\mu(1+\frac{\nu}{\eta})}{\nu+\eta+\mu(1+(1-q)\frac{\nu}{\eta})}.$$

Отсюда, имеем, вероятности состояний в стационарном режиме функционирования объекта связаны между собой следующим соотношениями:

$$p_1 = \frac{q\mu}{\nu+\eta} p_0, \qquad p_2 = \frac{(1-q)}{\eta} p_0.$$

Время установления стационарного режима функционирования объекта определяется интенсивностью воздействия внешней угрозы, если $\mu \ll \eta$.

Вероятности состояний системы будут отличаться от их стационарных значений не более чем на 5%, когда время функционирования системы будет удовлетворять условию:

$$t \geq \frac{3}{\min(-\lambda_1, -\lambda_2)}.$$

Это условие заведомо выполняется, из полученных соотношений для показателей λ_1, λ_2, при:

$$t \geq T_0 = \frac{3}{\eta}.$$

Наличие стационарного режима, позволяет оценить предельно достижимые значения функции риска $R(t)$ и суммарной прибыли $W(t)$.

При $t \to \infty$, имеем

$$R(t) = p_0\eta \left(d_1^{(0)} \frac{q\mu}{\nu+\eta} + d_2^{(0)} \frac{(1-q)\mu}{\eta}\right) \int_0^t \gamma^\tau \, d\tau$$

$$W(t) = p_0 \left(w_0^{(0)} + w_1^{(0)} \frac{q\mu}{\nu+\eta} + w_2^{(0)} \frac{(1-q)\mu}{\eta}\right) \int_0^t \gamma^\tau \, d\tau$$

Откуда для показателя «суммарная прибыль - риск», равного отношению суммарной прибыли к величине риска, имеем:

$$\frac{W(t)}{R(t)} \to t \to \infty \frac{w_0^{(0)}(1+\frac{\nu}{\eta}) + w_1^{(0)} q\frac{\mu}{\eta} + w_2^{(0)}(1-q)\frac{\mu}{\eta}(1+\frac{\nu}{\eta})}{d_1^{(0)} q\mu + d_2^{(0)}(1-q)\mu(1+\frac{\nu}{\eta})} = WR_{lim}.$$

Если время, необходимое системе для отражения внешней угрозы, мало, что равносильно условию $\nu \to \infty$, то:

$$WR_{lim}^{(\nu\to\infty)} = \frac{w_0^{(0)} + w_2^{(0)}(1-q)\frac{\mu}{\eta}}{d_2^{(0)}(1-q)\mu},$$

то есть эффективность функционирования системы по критерию «суммарная прибыль - риск» определяется ее способность достоверно идентифицировать возникновение внешней угрозы, которая характеризуется вероятностью q.

Если же время, необходимое системе для отражения внешней угрозы, велико, то есть $\nu \to 0$, то:

$$WR_{lim}^{(\nu\to\infty)} = \frac{w_0^{(0)} + w_1^{(0)} q\frac{\mu}{\eta} + w_2^{(0)}(1-q)\frac{\mu}{\eta}}{d_1^0 q\mu + d_2^{(0)}(1-q)\mu}$$

Рассмотрим частный случай, когда система в условиях воздействия внешней угрозы не способна функционировать в соответствии со своим целевым назначением, то есть ее производительность при воздействии внешней угрозы равна нулю:

$$w_1^{(0)} = 0, w_2^{(0)} = 0.$$

В этом случае предельное значение показателя «суммарная прибыль-риск» будет равно:

$$WR_{lim} = \frac{w_0^{(0)}}{d_1^0 q\mu + d_2^{(0)}(1-q)\mu} \frac{1+\frac{\nu}{\eta}}{\frac{1}{1+\frac{d_1^{(0)}}{d_2^{(0)}}\frac{q}{1-q}} + \frac{\nu}{\eta}}$$

Если время, необходимое системе для отражения внешней угрозы, мало $(\nu \to 0)$, то:

$$WR_{lim}^{(\nu\to\infty)} = \frac{w_0^{(0)} + w_1^{(0)} q\frac{\mu}{\eta} + w_2^{(0)}(1-q)\frac{\mu}{\eta}}{d_1^0 q\mu + d_2^{(0)}(1-q)\mu}$$

Сравнивая последние соотношения, получаем, что эффективное противодействие внешним угрозам позволяет повысить качество функционирования объекта по критерию «суммарная прибыль - риск» в $1 + \frac{d_1^{(0)}}{d_2^{(0)}}\frac{q}{1-q}$ раз.

Литература:

1. **Баранов, Н.А.** Модель динамики риска с учетом возможностей системы по идентификации опасных внешних воздействий [Текст] / И.В. Васильев // Нелинейный мир. 2011. Т.9, №12. С.801-806.
2. **Баранов, Н.А.** Оптимизация ресурсов, выделяемых на идентификацию состояния системы [Текст] / А.И. Сурков // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2010. Т.17, №3. С.205-214.
3. **Виленский, П.Л.** Оценка эффективности инвестиционных проектов. [Текст] / В.Н. Лившиц, С.А. Смоляк // Теория и практика. М.: Дело, 2008.
4. **Сапарова, Г.Б.** Математические модели оценки финансовых рисков. [Текст] / Султан кызы Н. // ОшТУ, Известия, 2021.