УДК 517.949.6

Абдиназарова Айнагул Абдиназаровна, Абдыкаримов Элдияр Максатбекович, Кадырбек кызы Гүлмайрам – магистранттар,
Ош технологиялык университети

ЭКИ ӨЗГӨРМӨДӨН КӨЗ КАРАНДЫ БОЛГОН ТУРАКТУУ КОЭФФИЦИЕНТТҮҮ ГИПЕРБОЛИКА ТИБИНДЕГИ ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЖАЛПЫ ЧЕЧИМДЕРИН ТАБУУ

Физикалык математиканын көптөгөн маселелери жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелерге келтирилет. Бул макалада көпчүлүк учурларда кездешүүчү 2-тартиптеги гиперболика тибиндеги дифференциалдык теңдеме каралды.

Ачкыч сөздөр: гиперболика тибиндеги теңдеме, жекече туундулуу теңдеме, кыл, валдын буралып термелүүсү, газдын термелиши, кылдын туурасынан термелиши.

Абдиназарова Айнагул Абдиназаровна,
Абдыкаримов Элдияр Максатбекович, Кадырбек кызы Гулмайрам – магистранты,
Ошский технологический университет

НАХОЖДЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Многие задачи математической физики приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными. В настоящей статье рассмотрено одно из основных уравнений гиперболического типа, наиболее часто встречающегося 2-го порядка.

Ключевые слова: уравнение гиперболического типа, уравнение с частными производными, струна, крутильные колебания вала, колебания газа, поперечные колебания струны.

Abdinazarova Ainagul Abdinazarovna, Abdykarimov Eldiyar Maksatbekovich , Kadyrbek kyzy Gulmairam - graduate students,
Osh technological university

FINDING A GENERAL SOLUTION OF THE HYPERBOLIC EQUATION TYPE WITH CONSTANT COEFFICIENTS, DEPENDING ON TWO VARIABLES

Many problems of mathematical physics lead to partial differential equations. This article discusses one of the basic equations of the hyperbolic type, the more common of the 2nd order.

Key words: hyperbolic type equation, partial differential equation, string, torsional vibrations of a shaft, gas vibrations, transverse vibrations of a string.

Введение. В математической физике под струной понимают гибкую, упругую нить. Напряжения, возникающие в струне, в любой момент времени направлены по касательной к ее профилю. Пусть струна длины l в начальный момент направлена по отрезку оси $0x$ от 0 до l.

В статье рассмотрено простейшее уравнение гиперболического типа – волновое уравнение. К исследованию этого уравнения приводят рассмотрение процессов поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний в проводе, крутильных колебаний вала, колебаний газа и т. д [2,3].

Будем рассматривать малые отклонения точек струны от начального положения. В силу этого можно предполагать, что движение точек струны происходит перпендикулярно оси $0\boldsymbol{x}$ и в одной плоскости. При этом предположении процесс колебания струны описывается одной функцией $u(x,t),$ которая дает величину перемещения точки струны с абсциссой x в момент t [1].

Постановка задачи. Найти решение уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_2\frac{\partial u}{\partial x}+a_3\frac{\partial u}{\partial t}+a_4u,\qquad 0<x<\infty,\qquad t>1, \tag{1}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u_{tt}(0,t)+u_t(0,t)+u_x(0,t)+u(0,t)=sin\omega t+cos\omega \tag{2}$$

и начальному условию

$$u(x,0)=0,\ \ u_t(x,0)=f(x) \tag{3}$$

где $a_i(i=\overline{1,4})$ −постоянные коэффициенты, $f(x)-$ заданная функция.

В данной статье рассмотрим сумму двух бегущих волн вида [4,5]

$$u(x,t)=e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}f(\varphi(x)+t)+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}f(\varphi(x)-t) \tag{4}$$

где $\beta_1,\ \beta_2$ −произвольныепостоянные, $\psi_1,\psi_2,f,\ \varphi-$ произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, $\varphi'(x)\neq 0.$

Пусть бегущая волна (4) есть общее решение некоторого уравнения гиперболического типа (1) и удовлетворяет граничному (2), начальному условию (3).

Дифференцируя функцию (4), получим [7]

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\psi_1'(x)f(\varphi(x)+t)+\varphi'(x)f'(\varphi(x)+t)]$$
$$+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\psi_2'(x)f(\varphi(x)-t)+\varphi'(x)f'(\varphi(x)-t)]. \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\psi_1'(x)e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}\,[\psi_1'(x)f(\varphi(x)+t)+\varphi'(x)f'(\varphi(x)+t)]+$$
$$e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}\Big[\psi_1''(x)f(\varphi(x)+t)+\psi_1'(x)\varphi'(x)f'(\varphi(x)+t)\varphi''(x)f'(\varphi(x)$$
$$+t)+\big(\varphi'(x)\big)^2f''(\varphi(x)+t)\Big]$$
$$+\psi_2'(x)e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\psi_2'(x)f(\varphi(x)-t)+\varphi'(x)f'(\varphi_1(x)-t)]$$
$$+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}\Big[\psi_2''(x)f(\varphi(x)-t)$$
$$+\psi_2'(x)\varphi'(x)f'(\varphi(x)-t)+\varphi''(x)f'(\varphi(x)-t)+\big(\varphi'(x)\big)^2f''(\varphi(x)-t)\Big]$$

или, окончательно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}\Big[\Big(\big(\psi_1'(x)\big)^2+\psi_1''(x)\Big)f(\varphi(x)+t)$$
$$+\big(2\psi_1'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\big)f'(\varphi(x)+t)+\big(\varphi'(x)\big)^2f''(\varphi(x)+t)\Big]$$
$$+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}\Big[\Big(\big(\psi_2'(x)\big)^2+\psi_2''(x)\Big)f(\varphi(x)-t)$$
$$+\big(2\psi_2'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\big)f'(\varphi(x)-t)+\big(\varphi'(x)\big)^2f''(\varphi(x)-t)\Big]. \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}\big(\beta_1 f(\varphi(x)+t)+f'(\varphi(x)+t)\big)$$
$$+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}\big(\beta_2 f(\varphi(x)-t)-f'(\varphi(x)-t)\big)\,. \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\beta_1 e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}(\beta_1 f(\varphi(x)+t)+f'(\varphi(x)+t))$$

$$
\begin{aligned}
&+e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}(\beta_1 f'(\varphi(x)+t)+f''(\varphi(x)+t))\\
&+\beta_2 e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}(\beta_2 f(\varphi(x)-t)-f'(\varphi(x)-t))\\
&+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}(-\beta_2 f'(\varphi(x)-t)+f''(\varphi(x)-t))\\
&=e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\beta_1^2 f(\varphi(x)+t)+2\beta_1 f'(\varphi(x)+t)+f''(\varphi(x)+t)]\\
&+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\beta_2^2 f(\varphi(x)-t)-2\beta_2 f'(\varphi(x)-t)+f''(\varphi(x)-t)]. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Подставляя (4) - (8) в (1), получим

$$
\begin{aligned}
&e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\beta_1^2 f(\varphi(x)+t)+2\beta_1 f'(\varphi(x)+t)+f''(\varphi(x)+t)]\\
&+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\beta_2^2 f(\varphi(x)-t)-2\beta_2 f'(\varphi(x)-t)+f''(\varphi(x)-t)]\\
&=a_1\Big\{e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}\Big[\Big(\big(\psi_1'(x)\big)^2+\psi_1''(x)\Big)f(\varphi(x)+t)\\
&+\big(2\psi_1'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\big)f'(\varphi(x)+t)+\big(\varphi'(x)\big)^2 f''(\varphi(x)+t)\Big]\\
&+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}\Big[\Big(\big(\psi_2'(x)\big)^2+\psi_2''(x)\Big)f(\varphi(x)-t)\\
&+\big(2\psi_2'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\big)f'(\varphi(x)-t)+\big(\varphi'(x)\big)^2 f''(\varphi(x)-t)\Big]\Big\}\\
&+a_2\big\{e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\psi_1'(x)f(\varphi(x)+t)+\varphi'(x)f'(\varphi(x)+t)]\\
&+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\psi_2'(x)f(\varphi(x)-t)+\varphi'(x)f'(\varphi(x)-t)]\big\}\\
&+\mathrm{a}_3\big\{e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}\big(\beta_1 f(\varphi(x)+t)+f'(\varphi(x)+t)\big)\\
&+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}\big(\beta_2 f(\varphi(x)-t)-f'(\varphi(x)-t)\big)\big\}\\
&+a_4\big\{e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}f(\varphi(x)+t)+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}f(\varphi(x)-t)\big\}. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Приравнивая коэффициенты при $f(\varphi(x)+t), f'(\varphi(x)+t), f''(\varphi(x)+t), f(\varphi(x)-t),$ $f'(\varphi(x)-t), f''(\varphi(x)-t)$ в левых и правых частях полученного равенства, имеем

$$
\begin{cases}
\beta_1^2=a_1\Big(\big(\psi_1'(x)\big)^2+\psi_1''(x)\Big)+a_2\psi_1'(x)+a_3\beta_1+a_4,\\
2\beta_1=a_1\big(2\psi_1'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\big)+a_2\varphi'(x)+a_3,\\
1=a_1(\varphi'(x))^2,\\
\beta_2^2=a_1\Big(\big(\psi_2'(x)\big)^2+\psi_2''(x)\Big)+a_2\psi_2'(x)+a_3\beta_2+a_4,\\
-2\beta_2=a_1\big(2\psi_2'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\big)+a_2\varphi'(x)-a_3,\\
1=a_1(\varphi'(x))^2.
\end{cases}
$$

Из этой системы видно, что неизвестные $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ следует определить из следующей системы уравнений:

$$
\begin{cases}
a_1=\frac{1}{(\varphi'(x))^2},\\
2\beta_1=\frac{1}{\left(\varphi'(x)\right)^2}\big(2\psi_1'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\big)+a_2\varphi'(x)+a_3,\\
-2\beta_2=\frac{1}{\left(\varphi'(x)\right)^2}\big(2\psi_2'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\big)+a_2\varphi'(x)-a_3,\\
\beta_1^2=\frac{1}{\left(\varphi'(x)\right)^2}\Big(\big(\psi_1'(x)\big)^2+\psi_1''(x)\Big)+a_2\psi_1'(x)+a_3\beta_1+a_4,\\
\beta_2^2=\frac{1}{(\varphi'(x))^2}\Big(\big(\psi_2'(x)\big)^2+\psi_2''(x)\Big)+a_2\psi_2'(x)+a_3\beta_2+a_4.
\end{cases} \qquad (10)
$$

Из первых трех уравнений системы (10) $a_1,\ a_2,\ a_3$:

$$
\begin{cases}
a_1=\frac{1}{(\varphi'(x))^2},\\
a_2=\frac{\beta_1-\beta_2}{\varphi'(x)}-\frac{\psi_1'(x)+\psi_2'(x)}{(\varphi'(x))^2}-\frac{\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^3},\\
a_3=\beta_1+\beta_2-\frac{1}{\varphi'(x)}\big(\psi_1'(x)-\psi_2'(x)\big).
\end{cases} \qquad (11)
$$

Используя найденные значения $a_1,\ a_2,\ a_3$ из четвертого уравнения системы (10) найдем a_4. Тогда, после некоторых вычислений, получим

$$a_4=\frac{\beta_1^2+\beta_2^2}{2}+\frac{1}{2((\varphi'(x))^2}[(\psi_1'(x))^2+\psi_1''(x)+(\psi_2'(x))^2+\psi_2''(x)]$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\beta_1-\beta_2}{\varphi'(x)}-\frac{\psi_1'(x)+\psi_2'(x)}{((\varphi'(x))^2}-\frac{\varphi''(x)}{((\varphi'(x))^3}\right]\left(\psi_1'(x)+\psi_2'(x)\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left[\beta_1+\beta_2-\frac{1}{\varphi'(x)}\left(\psi_1'(x)+\psi_2'(x)\right)\right](\beta_1+\beta_2). \qquad (12)$$

Определение a_4 из пятого уравнения из системы (10) также приводит к результату (12), поэтому система (10) совместна. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Уравнение гиперболического типа [6]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{(\varphi'(x))^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left\{\frac{\beta_1-\beta_2}{\varphi'(x)}-\frac{\psi_1'(x)+\psi_2'(x)}{(\varphi'(x))^2}-\frac{\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^3}\right\}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$+\left\{\beta_1+\beta_2-\frac{1}{\varphi'(x)}\left(\psi_1'(x)-\psi_2'(x)\right)\right\}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$+\left\{\frac{\beta_1^2+\beta_2^2}{2}+\frac{1}{2((\varphi'(x))^2}[(\psi_1'(x))^2+\psi_1''(x)+(\psi_2'(x))^2+\psi_2''(x)]\right.$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\beta_1-\beta_2}{\varphi'(x)}-\frac{\psi_1'(x)+\psi_2'(x)}{((\varphi'(x))^2}-\frac{\varphi''(x)}{((\varphi'(x))^3}\right]\left(\psi_1'(x)+\psi_2'(x)\right)$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left[\beta_1+\beta_2-\frac{1}{\varphi'(x)}\left(\psi_1'(x)+\psi_2'(x)\right)\right](\beta_1+\beta_2)\right\}\cdot u$$

допускает общее решение уравнения (1).

Вывод. Выбор величин $\beta_1,\ \beta_2,\ C$ и функций $\psi_1,\psi_2,\ f,\ \varphi$ позволяет получить различные уравнения, часто встречающиеся в прикладных, технических и инженерных науках.

Аналогично можно доказать, что уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{(\varphi'(x))^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left\{\frac{\beta_1-\beta_2}{\varphi'(x)}-\frac{\psi_1'(x)+\psi_2'(x)}{(\varphi'(x))^2}-\frac{\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^3}\right\}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$+\left\{\beta_1+\beta_2-\frac{1}{\varphi'(x)}\left(\psi_1'(x)-\psi_2'(x)\right)\right\}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$+\left\{\frac{\beta_1^2+\beta_2^2}{2}+\frac{1}{2((\varphi'(x))^2}[(\psi_1'(x))^2+\psi_1''(x)+(\psi_2'(x))^2+\psi_2''(x)]\right.$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\beta_1-\beta_2}{\varphi'(x)}-\frac{\psi_1'(x)+\psi_2'(x)}{((\varphi'(x))^2}-\frac{\varphi''(x)}{((\varphi'(x))^3}\right]\left(\psi_1'(x)+\psi_2'(x)\right)$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left[\beta_1+\beta_2-\frac{1}{\varphi'(x)}\left(\psi_1'(x)+\psi_2'(x)\right)\right](\beta_1+\beta_2)\right\}\cdot u$$

и допускает общее решение вида

$$u(x,t)=e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}f(\varphi(x)+t)+e^{C\psi_2(x)+\beta_2 t}f(\varphi(x)-t).$$

где $\beta_1,\beta_2,C-$ произвольные постоянные числа, $\psi_1,\psi_2,\ f,\ \varphi-$ произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, $\varphi'(x)\neq 0$.

Литература:

1. **Самарский, А.А.** Математическое моделирование [Текст] / А.П. Михайлов // - М.: физматлит-2005, 313с.
2. **Бугров, Я.С.** Дифференциальные уравнения [Текст] / С.М. Никольский // – Ростов-на-Дону 1991. 506с.
3. **Ацел, Я.** Функциональные уравнения с несколькими переменными [Текст] / Ж. Домбр // – М.: физматлит-2003, 428с.

4. **Рафатов, Р.** Дифференциалдык тендемелер / А. Асанов // Бишкек-2007, 227 б.
5. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики [Текст] // – М.: физматлит - 1991, 400с.
6. **Тихонов, А.Н.** Уравнения математической физики [Текст] //- Самарский А.А.М.: Наука-1977, 736с.
7. **Кутунаев, Ж.Н.** Решение модельных задач с помощью уравнения гиперболического типа с переменными коэффициентами. [Текст] // Проблемы автоматики и управления №1 (32), Бишкек-2017, С.11