УДК 512.86

Сатаров Жоомарт - д. ф-м.н., профессор,
Ахунбек кызы Мадина - магистрант,
Ошский технологиялык университети

ГЕНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЕКТИВНОЙ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАД РАДИКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ

В статье дается описание проективной элементарной линейной группы над радикальным кольцом в терминах образующих и соотношений.

Ключевые слова: радикальное кольцо, трансвекция, проективная группа, система соотношений.

Сатаров Жоомарт - д. ф-м.н., профессор,
Ахунбек кызы Мадина - магистрант,
Ошский технологический университет

РАДИКАЛДЫК АЛКАКТЫН УСТУНДО ПРОЕКТИВДИК ЭЛЕМЕНТАРДЫК СЫЗЫКТУУ ГРУППАНЫН ГЕНЕТИКАЛЫК БАЯНДАЛЫШЫ

Макалада радикалдык алкактын устундо проективдик элементардык сызыктуу группанын тузуучу жана катыштар терминдериндеги баяндамасы берилет.

Ачкыч сөздөр: радикалдык алкак, трансвекция, проективдик группа, катыштар системасы.

Satarov Zhoomart - Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Ahunbek kyzy Madina – graduate student,
Osh Technologycal University

GENETIC DESCRIPTION OF A PROJECTIVE ELEMENTARY LINEAR GROUP OVER A RADICAL RING

The article describes a projective elementary linear group over a radical ring in terms of generators and relations.

Key words: radical ring, transvection, projective group, the ratio system

Проективная для данной G группа определяется как ее фактор по центру PG=G/cent G. Представление факторов PG в виде образуюших и соотношений является одним из способов их изучения и оно по сей день не теряет свою актуальность. Сказанное в полной мире относится также и к линейным группам. Целью настоявшей работы является описание проективной элементарной линейной группы PGE°(n,R) степени $n \geq 2$ над произвольным радикальным кольцом R в терминах порождающих элементов и определяющих соотношений (т.е нахождение ее генетического описания).

Чтобы поставить задачу точно, напомним необходимые определения. Для ассоциативного кольца Δ через $\circ$ обозначается его присоединенное умножение (т.е. бинарная операция $\chi \circ \gamma = \chi + \chi\gamma + \gamma$). Элемент х€Δ называется квазиобратимым, если для него $\chi \circ \gamma = 0 = \gamma \circ \chi$ при некотором γ€Δ. По квазиобратимому х его квазиобтратное $\gamma = \chi'$ всегда определяется однозначно. Совокупность всех квазиобратимых элементов Δ° из Δ образует группу по операцию $\circ$ (где единицей будет нуль!). Так как в случае наличия 1 в Δ отображение $\Delta^\circ \to \Delta^\bullet$ по правилу $\chi \to 1+\chi$ (здесь $\Delta^\bullet$ означает мультипликативную группу кольца Δ) задает изоморфизм, введенная группа Δ° является обобщением понятия мультипликативной группы $\Delta^\bullet$ на самые общие случаи ассоциативных колец. Напомним, что ассоциативное кольцо Δ называется *радикальным*, если оно совпадает со своей присоединенной группой Δ°. Очевидными примерами радикальных колец могут послужить все кольца с нулевыми умножениями. Первый пример нетривиального радикального кольца (а точнее пример простого радикального кольца) в 1961-м году построил Сансяда [1]. Как хорошо видно из изложенного, введенные кольца уже интересны по своему причудливому определению.

Тривиальный случай, когда радикальное кольцо нулевое, для нас не представляет интереса. Поэтому начиная с этого места под R раз и навсегда будет подразумеваться любое радикальное кольцо, отличное от нуля. Очевидно во всяком таком R 1 не существует, ибо в противном случае имели бы $-1 \notin R^\circ$ (т.е. R° не будет совпадать с R). Обозначим через $GL^\circ(n,R)$ присоединенную группу полного матричного кольца M (n,R) и назовем ее обобщенной полной линейной группой степени n над кольцом R.

В работе мы принимаем следующие обозначения: $t_{ig}(\chi)(i \neq g)-$ кавзитрансвекция, т.е матрица из M(n,R), где на позиции *(i,g)* стоит элемент χ и все другиие позиции заполнены нулями ; $D_i(\varepsilon)(i<n)-$ диагональная матрица из M(n,R), отличающаяся от нулевой матрицы лишь двумя позициями *(i,i)* и (n,n), где стоят элементы ε и ε' соответственно; $D_n(\sigma)$ - матрица из M(n,R), отличающаяся от нулевой матрицы лишь одной позицией (n,n), где стоит элемент σ.

Перечисленные только что матрицы входят в группу $GL^\circ(n,R)$ очевидным образом. Подгруппа в $GL^\circ(n,R)$, порожденная элементарными матрицами

$t_{ig}(\chi), i \neq g; D_k(\varepsilon), k \leq n(\chi,\varepsilon \in R, 1 \leq i,k,g \leq n),$

обозначается через $GE^\circ(n,R)$ и называется элементарной линейной группой степени n над кольцом R. Нашей целью в этой работе является нахождение генетического описания проективной группы $PGE^\circ(n,R) = GE^\circ(n,R)/centGE^\circ(n,R), n \geq 2$. Пусть *G(R)* обозначает совокупность тех x из R, для которых матрицы $D_2(x)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}$ являются некоторыми словами алфавита $t_{12}(\alpha)=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $t_{21}(\beta)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \beta & 0\end{pmatrix}$, $D_1(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \alpha,\beta,\varepsilon \in R.$

Введенная *G(R)* образует подгруппу в R°.

Упомянутую группу $PGE^\circ(n,R)$ мы будем представлять в естественной порождающей системе

$$t_{ig}(\alpha), i \neq g, D_k(\varepsilon), k<n; D_n(\sigma)(\alpha,\varepsilon \in R, \sigma \in G(R), 1 \leq i,k,g \leq n), \qquad (*)$$

Это представление опирается на некоторое генетическое описание основной группы $GE^\circ(n,R)$ относительно алфавита (*). Точнее, оно может быть получено, если присоединять к определяющим $GE^\circ(n,R)$ соотнощениям еще соотнощения *V=0*, где *V* пробегает некоторую, порождающую центра $centGE^\circ(n,R)$ систему слов (в том же алфавите (*), см ., например, [2]).

В алфавите (*) имеют место следующие непосредственно проверяемые соотношения:

1. $D_k(\varepsilon)\circ D_k(\sigma)=D_n([\varepsilon,\sigma])\circ D_k(\varepsilon\circ\sigma).k<n;$
2. $D_i(\varepsilon)\circ D_k(\sigma)=D_n([\varepsilon,\sigma])\circ D_k(\sigma)\circ D_i(\varepsilon), i\neq k, i,k<n;$
3. $D_n(\varepsilon)\circ D_n(\sigma)=D_n(\varepsilon\circ\sigma);$
4. $D_n(\varepsilon)\circ D_k(\sigma)=D_k(\sigma)\circ D_n(\sigma^{'},\varepsilon^{'}]\circ\varepsilon), k<n;$
5. $t_{in}(\alpha)\circ D_i(\varepsilon)=D_i(\varepsilon)\circ t_{in}(\beta),$ где $\beta=\alpha+\alpha\varepsilon^{'}+\varepsilon^{'}(\alpha+\alpha\varepsilon^{'});$
6. $t_{ni}(\alpha)\circ D_i(\varepsilon)=D_i(\varepsilon)\circ t_{ni}(\beta),$ где $\beta=\alpha+\alpha\varepsilon+\varepsilon(\alpha+\alpha\varepsilon);$
7. $t_{ig}(\alpha)\circ D_i(\varepsilon)=D_i(\varepsilon)\circ t_{ig}(\alpha+\varepsilon^{'}\alpha),$ i, g < n;
8. $t_{nj}(\alpha)\circ D_k(\varepsilon)=D_k(\varepsilon)\circ t_{nj}(\alpha+\varepsilon\alpha), j\neq, k<n;$
9. $t_{ik}(\alpha)\circ D_k(\varepsilon)=D_k(\varepsilon)\circ t_{ik}(\alpha+\alpha\varepsilon), i,k<n;$
10. $t_{ik}(\alpha)\circ D_k(\varepsilon)=D_k(\varepsilon)\circ t_{in}(\alpha+\alpha\varepsilon^{'}), i\neq k<n;$
11. $t_{ij}(\alpha)\circ D_k(\varepsilon)=D_k(\varepsilon)\circ t_{ij}(\alpha), k<n, \{i,j\}\cap\{k,n\}=0;$
12. $t_{nj}(\alpha)\circ D_n(\sigma)=D_k(\sigma)\circ t_{nj}(\alpha+\sigma^{'}\alpha);$
13. $t_{in}(\alpha)\circ D_n(\sigma)=D_n(\sigma)\circ t_{in}(\alpha+\alpha\sigma);$
14. $\mathrm{t}_{\mathrm{ij}}(\alpha)\circ D_n(\sigma)=D_n(\sigma)\circ t_{ij}(\alpha), i,j<n;$
15. $t_{ij}(\alpha)\circ t_{ij}(\beta)=t_{ij}(\alpha+\beta);$
16. $t_{in}(\alpha)\circ t_{ni}(\beta)=t_{ni}(\beta+\beta\varepsilon^{'})\circ D_i(\varepsilon)\circ D_n(\varepsilon\circ\sigma)\circ t_{in}(\alpha+\varepsilon^{'}\alpha);$
17. $t_{ij}(\alpha)\circ t_{ji}(\beta)=t_{ji}(\beta+\beta\varepsilon^{'})\circ D_i(\varepsilon)\circ D_j(\sigma)\circ D_n(\sigma\circ\varepsilon)\circ t_{ij}(\alpha+\varepsilon^{'}\alpha), i,j<n;$
18. $t_{ik}(\alpha)\circ t_{kj}(\beta)=t_{ij}(\alpha\beta)\circ t_{kj}(\beta)\circ t_{ik}(\alpha), i\neq j;$

$t_{ik}(\alpha)\circ t_{rj}(\beta)=t_{rj}(\beta)\circ t_{ik}(\alpha), i\neq j, k\neq r,$ где в сериях 16 и 17 $\varepsilon=\alpha\beta, \sigma=-\beta(\alpha+\varepsilon^{'}\alpha).$

Квадратные же скобки из серий 1,2 и 4 означают квазикоммутаторы $[x,y]=x^{'}\circ y^{'}\circ x\circ y.$

Применяя метод трансформации, развитый, например, в работах [3].[4], можно показать полноту системы соотношений 1-19 для группы $GE^{\circ}(n,R).$ Эти повторяющиеся подробности здесь мы опускаем.

Переходим теперь к вычислению центра $Z=centE^{\circ}(n,R).$ Пусть $a=(a_{ij})$ – произвольная матрица из Z. Она необходимым образом удовлетворяет следующим условиям:

а) Для любого $i<n$ имеем импликации $D_i(x)\circ a=a\circ D_i(x)\rightarrow \mathrm{D_i}(x)a=a\ \mathrm{D_i}(x)\rightarrow x\mathrm{a_{ii}}=\mathrm{a_{ii}}x\rightarrow a_{ii}\in \mathrm{cent\,R},$

$D_1(x^{'})\circ a=a\circ D_1(x^{'})\rightarrow D_1(x')a\,D=a\ \mathrm{D_1}(x')\rightarrow xa_{nn}=a_{nn}x.$

Вторая импликация показывает, что последнее включение верно и при $i=n.$

в) Для любых $i,j, \mathrm{i}\neq \mathrm{j}, \mathrm{t_{ji}}(x)\circ a=a\circ t_{ji}(x)\rightarrow t_{ji}(x)a=at_{ji}(x)\rightarrow xa_{ij}=0=a_{ij}x\ , x\mathrm{a_{ii}}=a_{jj}x.$

Первые равенства дают нам, что для недиагональных позиций $a_{ij}\in \mathrm{AnnR}.$ А вторые же с учетом центральности диагональных элементов a_{ii} и a_{jj} приведут нас к $a_{ii}-a_{jj}\in \mathrm{AnnR},$ т.е. $a_{ii}\equiv a_{jj}$ (mod Ann R).

Пусть $d(\varepsilon) = diag(\varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon)$ означает скалярную матрицу порядка n. Из пунктов а) и в) следует, что $d(a'_{11}) \circ a' = w -$ не которая матрица с элементами из идеала AnnR. Отсюда следует представимость рассматриваемой матрицы в $w = d(\varepsilon) \circ a,$ где $\varepsilon \in \mathrm{cent\,R}$ и $\mathrm{a} \in \mathrm{M(n, AnnR)}$. И обратно, все такие комбинации $d(\varepsilon) \circ a$ входят в центр С очевидным образом. Для $x \in R$ и $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$ примем обозначение $\mathrm{x}^{(n)} = \mathrm{x} \circ \mathrm{x} \circ ..... \circ \mathrm{x},$ где число квазисомножителей равно (т.е. $x^{(n)} - n - я$ квазистепень элемента x). Примем также обозначени $\sqrt[(n)]{G(R)} = \{x \in R / x^{(n)} \in G(R)\},$ Легко проверить, что $centR \cap \sqrt[n]{G(R)}$ образует подгруппу в R°. Итак, мы установили, что центр Z порождается (буквенными) словами $t_{ij}(\alpha), \alpha \in AnnR,$ и словами длины n $D_1(\varepsilon) \circ \ldots \circ D_{n-1}(\varepsilon) \circ D_n(\varepsilon^{(n)}),$ где $\varepsilon \in \mathrm{cent\,R} \cap \sqrt[n]{\mathrm{G(R)}}.$

Тогда согласно сказанному выше, присоединение к 1-19 соотношений

20. $D_1(\varepsilon) \circ \ldots \circ D_{n-1}(\varepsilon) \circ D_n(\varepsilon^{(n)}) = 0, \varepsilon \in centR \cap \sqrt[(n)]{G(R)}$ и

21. $t_{ij}(\alpha) = 0, \alpha \in AnnR,$

дает нам полный для $PGR^{\circ}(n, R)$ набор соотношений (относительно того же (*)). К полученному генетическому описанию можно придать и вид

$$PGE^{\circ}(n, R) = < (*) // 1 - 21 > .$$

Литература:

1. **Sasiada, E.** Solution of the problem on the existence of a simple radical ring. [Text] / Bull. Acad. Polon. // Ser. Math., astronom. phys., 1961, 9, N 4, P. 257.
2. **Магнус, В.** Комбинаторная теория групп. [Текст] / А. Каррас, Д.М. Солитер, « Наука», 1974 , 455с.
3. **Сатаров, Ж.С.** Образущие и определяющие соотношение обобшенной полной линейной группы над колулокальными кольцами без единицы. [Текст] // Известия вузов. Матем., 2006.,– №10, –С . 59-67.
4. **Сатаров, Ж.С.** Образующие и определяющие соотношения обобщенной кольной линейной группы над колукальными кольцами без единицы. [Текст] // Известная вузов. Матем.,№1,С.33-41.