УДК 517.928

Алыбаев Курманбек Сарманович,д.ф.-м.н., проф., E-mail:alybaevkurmanbek@rambler.ru
Жалал Абадский государственный университет,
Мурзабаева Айтбу Бусурманкуловна, ст. преподаватель, E-mail:aytbu.murzabaeva@mail.ru
Ошский технологический университет

ЗАВИСИМОСТЬ ОБЛАСТЕЙ ПРИТЯЖЕНИЙ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ И РАСШИРЕНИЕ СМЕЖНЫХ ОБЛАСТЕЙ ПРИТЯЖЕНИЙ

В данной статье исследована зависимость существование областей притяжений от начальных значений для сингулярно возмущенных уравнений теряющих единственность при вырождении.

Ключевые слова:сингулярно возмущенные уравнения,вырожденное уравнение, область притяжения, линии уровня

Алыбаев Курманбек Сарманович, ф.-м.и.д., проф.,
Жалал-Абад мамлекеттик университети,
Мурзабаева Айтбу Бусурманкуловна, улук окуутучу, Ош технологиялык университети

ТАРТЫЛУУ АЙМАГЫНЫН БАШКЫ МААНИЛЕРДЕН КӨЗ КАРАНДЫЛЫГЫ ЖАНА ТАРТЫЛУУНУН АРАЛАШ АЙМАКТАРЫН КЕҢЕЙТҮҮ

Берилген макалада кубулганда жалгыздыгын жоготкон сингулярдуу дүүлүккөн теңдемелер үчүн баштапкы маанилердин тартылуу аймагынын жашашынын көз карандылыгы изилденген.

Ачкыч создор:сингулярдуу козголгон тендемелер, кубулган тендемелер, тартылуу аймагы, денгээл сызыгы

Alybaev Kurmanbek Sarmanobich, D.Ph-M.S., prof.,
Jalal - Abad stateuniversity,
Murzabaeva Aitbu Busurmankulovna, senior lecturer,
Osh technological university

DEPENDENCE OF THE AREAS OF ATTRACTIONS FROM THE INITIAL VALUES AND THE EXTENSION OF RELATED AREAS OF ATTRACTIONS

This article investigates the dependence of the existence of attraction regions on the initial values for singularly perturbed equations that lose their uniqueness during degeneracy.

Key words: singularly perturbed equations, degenerate equation, region of attraction, level lines

В ранних работах [1-3] авторов были введены понятия областей притяжения для сингулярно возмущенных уравнений вырожденные уравнения которых имеют несколько решений. В данной работе исследована зависимость областей притяжения от начальных значений.

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon) + z^2(t,\varepsilon) + \varepsilon f\big(t, z(t,\varepsilon)\big), \tag{1}$$

с начальным условием

$$z(\tilde{t}_0, \varepsilon) = \tilde{z}^0(\varepsilon), \tag{2}$$

где $t \in \Delta \subset C, \tilde{t}_0 \in \Delta$ и её внутренняя точка.

Пусть выполняются условия:U1. $\forall t \in \Delta\ (a(t) \neq 0)$ и $a(t) \in Q(\Delta)$

U2. $f(t,z) \in Q(H), H -$ некоторая область переменных t, z и

$\forall \left((t,\tilde{z}),(t,\tilde{\tilde{z}})\right) \in H\left(\left|f(t,\tilde{z}) - f(t,\tilde{\tilde{z}})\right| \leq M\left|\tilde{z} - \tilde{\tilde{z}}\right|\right).$

Вырожденное уравнение, соответствующее (1), имеет решения $\xi_1(t) \equiv 0, \xi_2(t) = -a(t).$

Возьмём произвольную внутреннюю точку $t_0 \in \Delta$ и определим функцию

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau.$$

$A(t_0) = 0$ и $A'(t_0) = a(t_0) \neq 0$. Отсюда следует, функция $A(t)$ имеет простой нуль.

Введем в рассмотрение линии уровня $(p_{10}) = \{t \in \Delta | ReA(t) = 0\}$.

Линии уровня(p_{10}) делит область Δ на части Δ_1,Δ_2 (рис. 1).

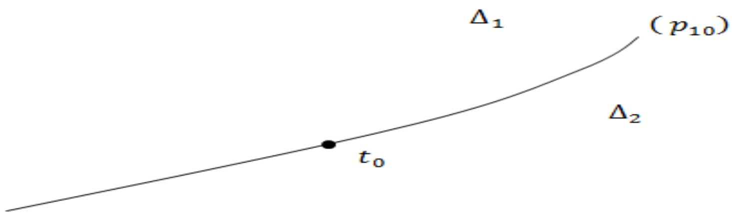

Рис.1. Линии уровня (p_{10})

В каждом из частей $\Delta_k (k = 1,2)$ функция $ReA(t)$ имеет значения различных знаков. Для определенности возьмём$\forall t \in \Delta_1 (ReA(t) \geq 0), \forall t \in \Delta_2 (ReA(t) \leq 0)$.

Область Δ_1 является областью притяжения решения $\xi_2(t)$ при условии $|z(t_0,\varepsilon) - a(t_0)| \leq M_0\varepsilon$, а область Δ_2 , областью притяжения решения $\xi_1(t)$ при $|z(t_0,\varepsilon)| \leq M_0\varepsilon$.

Исследуем зависимость существование областей притяжений от начальных значений $\tilde{t}_0$.

Пусть $\tilde{t}_0 \in \Delta_1$. Возьмём решение $\xi_1(t)$.

Определим функцию$A_0(t) = \int_{\tilde{t}_0}^{t} a(\tau)\, d\tau = A(t) - A(\tilde{t}_0)$.

$ReA_0(t) = ReA(t) - ReA(\tilde{t}_0)$. Введем в рассмотрение линии уровня

$(\tilde{p}_1) = \{t \in \Delta_1 | ReA(t) = ReA(\tilde{t}_0) = \tilde{p}_1 - const > 0\}$ (рис.2)

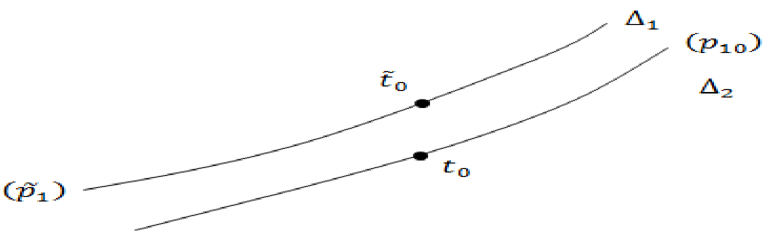

Рис.2. Линии уровня $(\tilde{p}_1)$

В (2) считаем $|z(\tilde{t}_0,\varepsilon)| = |z^0| \leq M_0\varepsilon$.

Теперь докажем существование области притяжения для решения $\xi_1(t)$.

Решение задачи. Поставленная задача решается следующей теоремой

Теорема 1. Пусть выполняются условия U1, U2. Тогда: 1. Существует область, Δ_{11} состоящая из частей Δ_1 и Δ_2; Решение задачи (1), (2) определенное в Δ_{11}. 2. Область Δ_{11} является областью притяжения решения $\xi_1(t)$.

Доказательство. Решение задачи (1), (2) представим в виде

$$z(t,\varepsilon)=\tilde{z}^0(\varepsilon)exp\frac{A_0(t)}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tilde{t}_0}^{t}exp\frac{A_0(t)-A_0(\tau)}{\varepsilon}[z^2(\tau,\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon f\left(\tau,z(\tau,\varepsilon)\right)]d\tau. \tag{3}$$

Область ограниченную линиями (p_{10}) и $(\tilde{p}_1)$ обозначим Δ_{10} и определим область $\Delta_0=\Delta_{10}\cup\Delta_2$.Проведем линии уровня$(\tilde{p}_2)=\{t\in\Delta|\mathcal{J}mA_0(t)=0\}$.

Вдоль линии уровня$ReA_0(t)$ строго монотонна. Линия $(\tilde{p}_2)$ проходит через точку $\tilde{t}$ и часть «идёт» по области Δ_0. Линия $(\tilde{p}_2)$ и (p_{10}) пересекаются. Точку пересечения обозначим $\tilde{\tilde{t}}$. Имеем $ReA(\tilde{\tilde{t}}_0)=ReA(\tilde{\tilde{t}})-ReA(\tilde{t}_0)$.

Поскольку $ReA(\tilde{\tilde{t}})=0$ и $ReA(\tilde{t}_0)>0$, то $ReA(\tilde{\tilde{t}}_0)<0$.

Таким образом, $\forall t\in\Delta_0(ReA_0(t)\leq 0)$, причем равенство имеет место только на $(\tilde{p}_1)$.

Для интеграла в (3) выберем пути интегрирования. Путь состоит из части $(\tilde{p}_1)[\tilde{t}_0,\tilde{t}]$ и части $(\tilde{p}_2)[\tilde{t},t]$.

Так как линии $(\tilde{p}_1),(\tilde{p}_2)$ являются аналитическими кривыми их уравнения можно представить в параметрической форме.

Пусть: уравнение $(\tilde{p}_1)$ представляется в виде $t_1=t_1(s),t_2=t_2(s),$ где s означает длину $(\tilde{p}_1)$ отсчитываемую от точки $\tilde{t}_0$ до $\tilde{t}$; уравнение $(\tilde{p}_2)$ представляется в виде $t_1=t_1(\sigma),t_2=t_2(\sigma),$ где σ означает длину $(\tilde{p}_2)$ отсчитываемую от точки $\tilde{t}$ до t. Учитывая выбранные пути интегрирования и параметрические представление кривых $(\tilde{p}_1),(\tilde{p}_2)$ уравнение (3) перепишем в следующем виде

$$z(\sigma,\varepsilon)=z_0exp\frac{A_0(\tau)}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s exp\frac{A_0(\tau)-A_0(\tilde{s})}{\varepsilon}[z^2(\tilde{s},\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon f\left(\tilde{s},z(\tilde{s},\varepsilon)\right)]\tau'(\tilde{s})d\tilde{s}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma}exp\frac{A_0(\sigma)-A_0(\tilde{\sigma})}{\varepsilon}\times$$
$$\times\left[z^2(\tilde{\sigma},\varepsilon)+\varepsilon f\left(\tilde{\sigma},z(\tilde{\sigma},\varepsilon)\right)\right]\tau'(\tilde{\sigma})d\tilde{\sigma}, \tag{4}$$

где $(\sigma,\varepsilon)\equiv z(t(\sigma),\varepsilon),\ A_0(\sigma)\equiv A_0\big(t(\sigma)\big),$

$A_0(\tilde{s})\equiv A_0\big(\tau(\tilde{s})\big), z(\tilde{s},\varepsilon)\equiv z(\tau(\tilde{s}),\varepsilon),$

$f\big(\tilde{s},z(\tilde{s},\varepsilon)\big)\equiv f\big(\tau(\tilde{s}),z(\tau(\tilde{s}),\varepsilon)\big), z(\tilde{\sigma},\varepsilon)\equiv z(\tau(\tilde{\sigma}),\varepsilon),$

$f\big(\tilde{\sigma},z(\tilde{\sigma},\varepsilon)\big)\equiv f\big(\tau(\tilde{\sigma}),z(\tilde{\sigma},\varepsilon)\big), \tau'(\tilde{\sigma})=\tau_1'(\tilde{\sigma})+i\tau_2'(\tilde{\sigma})$

$\tau'(\tilde{s})=\tau_1'(\tilde{s})+i\tau_2'(\tilde{s})$.

В (4) проведём следующее преобразование

$$z(\sigma,\varepsilon)=exp\frac{A_0(\sigma)-A_0(s)}{\varepsilon}\{z^0exp\frac{A_0(s)}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s exp\frac{A_0(s)-A_0(\tilde{s})}{\varepsilon}\times$$
$$\times\left[z^2(\tilde{s},\varepsilon)+\varepsilon f\left(\tilde{s},z(\tilde{s},\varepsilon)\right)\right]\tau'(\tilde{s})d\tilde{s}\}+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma}exp\frac{A_0(\sigma)-A_0(\tilde{\sigma})}{\varepsilon}\left[z^2(\tilde{\sigma},\varepsilon)+\varepsilon f\left(\tilde{\sigma},z(\tilde{\sigma},\varepsilon)\right)\right]\tau'(\tilde{\sigma})d\tilde{\sigma}, \tag{5}$$

В (5) выражение, содержащееся в $\{\dots\}$ даёт представление функции $z(\sigma,\varepsilon)$ на линии $(\tilde{p}_1)$.

Таким образом (5) можно представить в виде

$$z(\sigma,\varepsilon)=z(s,\varepsilon)exp\frac{A_0(\sigma)-A_0(s)}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\sigma}exp\frac{A_0(\sigma)-A_0(\tilde\sigma)}{\varepsilon}\times$$
$$\times\left[z^2(\tilde\sigma,\varepsilon)+\varepsilon f\left(\tilde\sigma,z(\tilde\sigma,\varepsilon)\right)\right]\tau'(\tilde\sigma)d\tilde\sigma. \qquad (6)$$

Представление (6) указывает, для исследования функции $z(\sigma,\varepsilon)$ в области Δ_0, сначала надо исследовать функцию $z(s,\varepsilon)$ на линии $(\tilde p_1)$. Займемся исследованием функции $z(s,\varepsilon)$. Имеем

$$z(s,\varepsilon)=\tilde z^0(\varepsilon)exp\frac{A_0(s)}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s exp\frac{A_0(s)-A_0(\tilde s)}{\varepsilon}\times\left[z^2(\tilde s,\varepsilon)+\varepsilon f\left(\tilde s,z(\tilde s,\varepsilon)\right)\right]\tau'(\tilde s)d\tilde s. \quad (7)$$

Отсюда получим

$$|z(s,\varepsilon)|\le M_1\varepsilon, 0\le s\le s_0. \qquad (8)$$

Неравенство (8) выполняются в части линии $(\tilde p_1)$ с длиной s_0 по обе стороны от точки $\tilde t_0$. (рис.3)

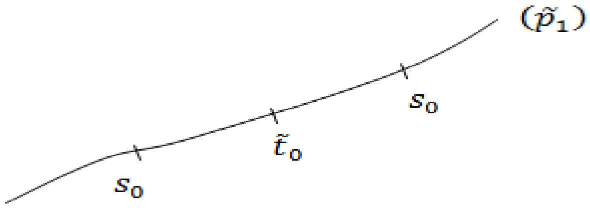

Рис. 3. Линии уровня $(\tilde p_1)$

Длинаs_0 (от точки $\tilde t_0$) определяют точки $\tilde t_{01}$ и $\tilde t_{02}$. Определим линии уровня

$(\tilde p_{21})=\{t\in\Delta|\mathfrak{Im}A_0(t)=\mathfrak{Im}A_0(\tilde t_{01})=\tilde p_{21}-const\}$,

$(\tilde p_{22})=\{t\in\Delta|\mathfrak{Im}A_0(t)=\mathfrak{Im}A_0(\tilde t_{02})=\tilde p_{22}-const\}$. (рис. 4).

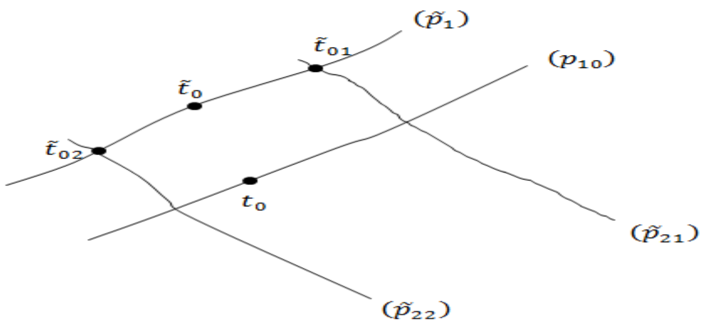

Рис. 4. Линии уровня $(\tilde p_{21})$, $(\tilde p_{22})$

Часть области Δ_0 ограниченную линии уровня$(\tilde p_1)$, $(\tilde p_{21})$, $(\tilde p_{22})$ обозначим Δ_{11}. Уравнение (6) будем рассматривать в Δ_{11}. Справедлива оценка $|z(\sigma,\varepsilon)|\le M_1\varepsilon, 0\le\sigma\le\sigma_0$. (9)

Отсюда следует

$$|z(t,\varepsilon)|\le M_1\varepsilon, t\in\Delta_{11}. \qquad (10)$$

Если Δ ограничена, то Δ_{11} также ограничена, если Δ не ограничена, то то Δ_{11} – также не ограничена.

Из (10) следует $z(t,\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Таким образом Δ_{11} является областью притяжения решения $\xi_1(t)\equiv 0$.

В уравнение (1) произведем замену

$$z(t,\varepsilon)=u(t,\varepsilon)+\xi_2(t) \qquad (11)$$

(11) подставляя в (1) получим уравнение

$$\varepsilon u'(t,\varepsilon)=-a(t)u(t,\varepsilon)+u^2(t,\varepsilon)+\varepsilon f_1\left(t,u(t,\varepsilon)+\xi_2(t)\right), \quad (12)$$

где $\quad f_1(t,u(t,\varepsilon)+\xi_2) \equiv f(t,u+\xi_2)-\xi_2'(t)$

с начальным условием

$$u(\tilde{t}_0,\varepsilon)=u^0(\varepsilon)=z(\tilde{t}_0,\varepsilon)-\xi_2(\tilde{t}),|u^0(\varepsilon)|\leq M_0\varepsilon. \quad (13)$$

Определив функцию $(A(t))$ построим области Δ_1 и Δ_2. Только в данном случае справедливы соотношения$\forall t\in\Delta_1(-ReA(t)\leq 0),\forall t\in\Delta_2(-ReA(t)\geq 0)$.

Как и в предыдущем случае исследуем зависимость существование области притяжения от начального значения $\tilde{t}_0$.

Пусть $\tilde{t}_0\in\Delta_2$. Определим функцию

$-A_0(t)=-\int_{\tilde{t}_0}^{t}a(\tau)\,d\tau=-A(t)+A(\tilde{t}_0)$,

и линии уровня$(\tilde{p}_1)=\{t\in\Delta_2|-ReA(t)=-ReA(\tilde{t}_0)=\tilde{p}_1-const>0\}$,

$(p_{10})=\{t\in\Delta|ReA(t)=0\}$(рис. 5)

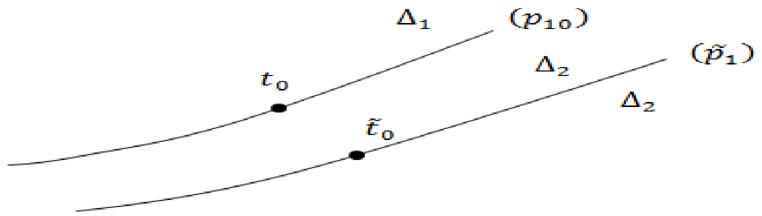

Рис. 5. Линии уровня $(\tilde{p}_1)$,(p_{10})

Пусть $\tilde{t}_{01},\tilde{t}_{02}\in(\tilde{p}_1)$ и эти точки лежат по обе стороны от точки $\tilde{t}_0$.
Проведём линии уровня$(\tilde{p}_{21})$, $(\tilde{p}_{22})$ проходящие через точки $\tilde{t}_{01}$ и $\tilde{t}_{02}$ соответственно.

$(\tilde{p}_{21})=\{t\in\Delta|\mathfrak{J}mA_0(t)=\mathfrak{J}mA_0(\tilde{t}_{01})=\tilde{p}_{21}-const\}$,

$(\tilde{p}_{22})=\{t\in\Delta|\mathfrak{J}mA_0(t)=\mathfrak{J}mA_0(\tilde{t}_{02})=\tilde{p}_{22}-const\}$. (рис. 6).

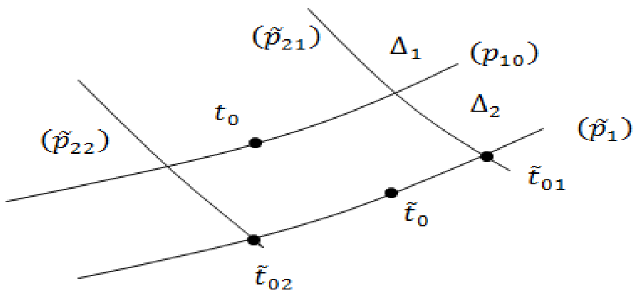

Рис. 6. Линии уровня $(\tilde{p}_{21})$,$(\tilde{p}_{22})$

Область ограниченную линиями $(\tilde{p}_1)$, $(\tilde{p}_{21})$, $(\tilde{p}_{22})$ обозначим Δ_{12}.Справедлива

Теорема 2. Пусть выполняются условия U1, U2. Тогда: 1. Существует решение задачи (1), (2) определенное в Δ_{12}. 2. Область Δ_{12} является областью притяжения решения $\xi_2(t)$ и Δ_{12} состоит из части Δ_2 и Δ_1

Задача (12), (13) идентична задаче (1), (2). Следовательно доказательство данной теоремы проводится повторением доказательства теоремы 1.

Доказанные теоремы подтверждают зависимость областей притяжения от начальных значений и возможности расширения областей притяжений.

Теперь рассмотрим возможность расширения областей притяжений.Область $\Delta_{10}(B)$ с помощью конформного отображения $A(t)=u+iv$ отображаются в некоторый прямоугольник $(\mathcal{P}_0)$ плоскости (u,v). Далее в процессе оценки последовательных приближений на переменную v введены ограничения

$$|v|\leq min\{|-\beta_1|,\beta_2\}\leq\frac{M_4-M_3}{M_1M_4^2}.(14)$$

Для переменной u, такого ограничения нет. Следовательно, область $(\mathcal{P}_{01})$ можно расширить влево по направлению оси u, а $(\mathcal{P}_{02})$ вправо по направлению оси u. При этом для переменной v граница $-\beta_1 \leq v \leq \beta_2$ сохраняется. (рис.7).

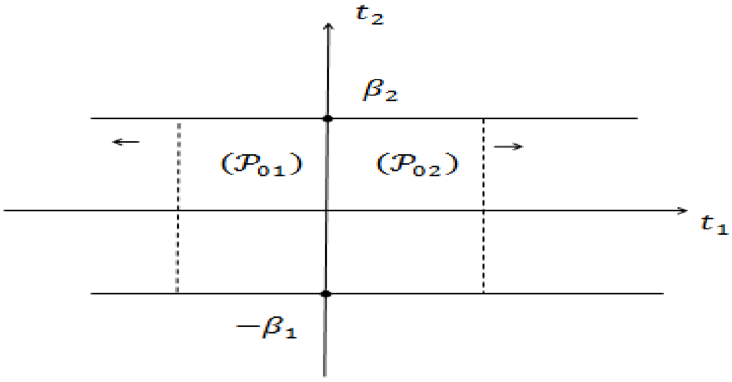

Рис. 7. Граница $-\beta_1 \leq v \leq \beta_2$

Для определения границ возможного расширения учтем, что прямоугольник $(\mathcal{P}_0)$ и область $\Delta_{10}(B)$ изоморфны. Прямая $v = \beta_2$ определяет линии уровня (p_{122}), а $v = -\beta_1$линии уровня (p_{121}) .

Так как линии уровня (p_{122}), (p_{121}) упираются к границе области Δ при ограниченномΔ, или уходят в бесконечность при неограниченном Δ, то границами областей притяжений $\left(\Delta_{111}\left(\xi_1(t)\right), \Delta_{112}\left(\xi_2(t)\right)\right)$ будут границы области Δ (рис. 8).

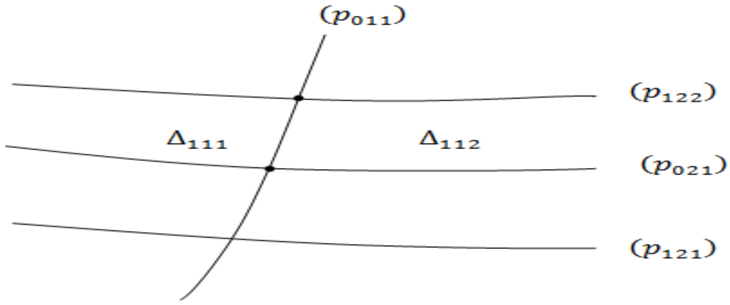

Рис. 8. Линии уровня (p_{122}), (p_{121})

Литература:

1. **Алыбаев К.С.** Сингулярно возмущенные уравнения, с аналитическими функциями теряющие единственность при вырождении [Текст] / К.С. Алыбаев, А.Б. Мурзабаева // Итоги науки в теории и практике 2017: сб. научных трудов Евразийского Научного Объединения по материалам XXXIV международной научной конференции. № 12 (34). Москва, 2017. – С. 15-20**.**
2. **Мурзабаева А.Б.** Системы сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями теряющие единственность при вырождении [Текст] /А.Б. Мурзабаева // Теоретические и практические вопросы современной науки: сб. научных трудов Евразийского Научного Объединения по материалам XLI международной научной конференции. № 7 (41). Москва, 2018. – С. 12-18.
3. **Alybayev K.S.** Singularly perturbed first-order equations in complex domains that lose their uniqueness under degeneracy [Text] / K.S. Alybaev, A.B. Murzabaeva // International conference on analysis and applied mathematics (icaam 2018) AIP Conference Proceedings Volume number: 1997, 020076: Aug 6 (2018); https://doi.org/10.1063/1.5049070 , Mersin 10, Turkey.