УДК 531.8

Кудаев Сергей Петрович – к.ф.-м.н., доцент,
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет
rimkudaev@rambler.ru.

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ НЕСВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ

В работе на основе материала, приведенного в учебнике [3], показывается, что условия разрешимости основной задачи теории несвободного движения может быть изложены без сложного математического аппарата, связанного с введением касательного пространства к многообразию всех возможных положений механической системы. Это существенно облегчает методику изложения данной темы.

Ключевые слова: Пространства, деальная связь, несвободная движения, вектор $\vec{W}^K$

Кудаев Сергей Петрович– ф.-м.и.к., доцент,
Улуттук изилдөө Мордовия мамлекеттик университети

ЭРКИН ЭМЕС КЫЙМЫЛЫНЫН ТЕОРИЯСЫНЫН НЕГИЗГИ КӨЙГӨЙЛӨРДҮ ЖАНА ШАРТТАРЫ

Окуу берилген [3] материалдын негизинде бул кагаз, ал эмес эркин теориясынын негизги көйгөйлөрүн жакшы эрий абалы механикалык система мүмкүн болгон кызмат орундарынын ар кандай жаныма мейкиндик киргизүү менен байланышкан татаал математикалык аппаратды сүрөттөлгөн мүмкүн экенин көрсөтүп турат. Бул абдан теманын берүү ыкмасын көмөктөшөт.

Негизги сөздөр: мейкиндик, идеалдуу байланыш, эркин эмес кыймыл, $\vec{W}^K$ *вектору.*

Kudaev Sergei Petrovich - candidate of physical and mathematical sciences,
Associate professor,
National Research Mordovia State University

SOLVABILITY CONDITIONS FOR THE MAIN PROBLEM OF THE THEORY OF NON-FREE MOTION

In the work on the basis of the material given in the textbook [3], it is shown that the condition of solvability of the basic problem of the theory of no free motion can be stated without a complex mathematical apparatus related to the introduction of the tangent space to the variety of all possible positions of a mechanical system. This greatly facilitates the method of presentation of this topic.

Key words: spaces, ideal connection, nonfree motion, vector $\vec{W}^K$

1. Введение. В работе [1,2] с новой точки зрения исследуется понятие об идеальности как голономных, так и неголономных связей. Выводится условие разрешимости основной задачи теории несвободного движения. При этом используется достаточно сложный математический аппарат, связанный с введением касательного пространства к многообразию всех возможных положений механической системы. В данной работе на основе материала, приведенного в учебнике [3], показывается, что условие разрешимости основной задачи теории несвободного движения может быть изложена без введения касательного пространства. Это существенно облегчает методику изложения данной темы.

2. Изображающая точка и уравнения ее движения. Рассмотрим движение свободной механической системы состоящей из N материальных точек, имеющих массы m_ν, $\nu = \overline{1,N}$. Положение точек в трехмерном пространстве в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ можно определить радиус-векторами.

$$\vec{r}_\nu = x_{\nu 1}\vec{i}_1 + x_{\nu 2}\vec{i}_2 + x_{\nu 3}\vec{i}_3, \qquad \nu = \overline{1,N}.$$

Векторные уравнения движения точек системы будут иметь вид:

$$m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = F_\nu, \qquad \nu = \overline{1,N}. \tag{1}$$

Здесь $\vec{F}_\nu = F_{\nu 1}\vec{i}_1 + F_{\nu 2}\vec{i}_2 + F_{\nu 3}\vec{i}_3$ - равнодействующая сил, действующих на ν-ю точку.

Векторные уравнения (1) соответствуют следующим скалярным дифференциальным уравнения:

$$m_\nu \ddot{x}_{\nu j} = X_{\nu j}, \quad \nu = \overline{1,N},\ j = 1,2,3. \tag{2}$$

Используем для проекций радиус-векторов сквозную нумерацию:

$$x_\mu = x_{\nu j}; \quad X_\mu = X_{\nu j},$$
$$\mu = 3(\nu - 1) + j, \quad \mu = \overline{1,3N}, \quad \nu = \overline{1,N},\ j = 1,2,3. \tag{3}$$

Помимо этого положим

$$m_\mu = m_\nu \quad при \quad \mu = 3\nu - 2, \quad 3\nu - 1, \quad 3\nu, \quad \nu = \overline{1,N}. \tag{4}$$

Тогда уравнения (2) можно переписать следующим образом:

$$m_\mu \ddot{x}_\mu = X_\mu, \quad \mu = \overline{1,3N}. \tag{5}$$

Введем в рассмотрение кинетическую энергию системы

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu v_\nu^2}{2} = \sum_{\mu=1}^{3N} \frac{m_\mu v_\mu^2}{2}, \quad \mu = \overline{1,3N}. \tag{6}$$

Положив

$$M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \equiv \frac{1}{3}\sum_{\mu=1}^{3N} m_\mu; \quad \widetilde{m} = m_\mu / m; \quad y_\mu = \sqrt{\widetilde{m}_\mu}\, X_\mu, \quad \mu = \overline{1,3N}. \tag{7}$$

величину T представим в виде

$$T = \frac{M}{2}\sum_{\mu=1}^{3N} \dot{y}_\mu^2, \quad \mu = \overline{1,3N}. \tag{8}$$

Введение переменных y_μ, $\mu = \overline{1,3N}$ позволяет систему уравнений (5) записать в следующем виде:

$$M\ddot{y}_\mu = Y_\mu \tag{9}$$

где $Y_\mu = X_\mu \big/ \sqrt{\widetilde{m}_\mu}, \quad \mu = \overline{1,3N}.$ (10)

Сравнивая выражения (8) и (9) с аналогичными выражениями для одной материальной точки, видим, что целесообразно ввести в рассмотрение 3N- мерное евклидово пространство и в нем декартовую систему координат Oy_1, y_{3N} с ортами $\vec{j}_1,\ldots,\vec{j}_{3N}$. Тогда скалярным уравнениям (9) будет соответствовать векторное уравнение

$$M\vec{W}=\vec{Y}. \tag{11}$$

где использованы 3N-мерные векторы

$$\vec{W}=\dot{\vec{V}}=\ddot{\vec{y}}, \qquad \vec{y}=y_\mu \vec{j}_\mu, \qquad \vec{Y}=Y_\mu \vec{j}_\mu, \quad \mu=\overline{1,N}. \tag{12}$$

Здесь предполагается, что по индексам, дважды встречающимся в произведении, производится суммирование в соответствующих пределах.

Точку массы M, положение которой в 3N - мерном пространстве характеризуется радиусом вектором $\vec{y}$ **,** будем называть изображающей точкой. Уравнения ее движения (11) имеют форму второго закона Ньютона. Формулы перехода (3), (4), (7), (10) позволяют по известному движению системы в трехмерном пространстве определить движение изображающей точки, и наоборот, если известно движение изображающей точки в 3N-мерном пространстве, то ему с помощью тех же формул можно сопоставить движение системы из N материальных точек в обычном трехмерном пространстве.

3. Постановка основной задачи теории несвободного движения механической системы. Пусть на движение механической системы рассматриваемой в п. 2 наложены голономные связи

$$f^{\zeta}(t,x_{11},x_{12},x_{13},...,x_{N1},x_{N2},x_{N3})=0, \quad \zeta=\overline{1,k}\,. \tag{13}$$

Векторные уравнения (1) описывающие свободное движение точек системы в этом случае примут вид:

$$m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu=\vec{F}_\nu+\vec{R}_\nu, \qquad \nu=\overline{1,N}. \tag{14}$$

Здесь $\vec{R}_\nu=R_{\nu 1}\vec{i}_1+R_{\nu 2}\vec{i}_2+R_{\nu 3}\vec{i}_3-$ реакция связей, приложенная к ν-ой точке.

Векторным уравнениям (14) соответствуют следующие скалярные дифференциальные уравнения:

$$m_\nu \ddot{x}_{\nu j}=X_{\nu j}+R_{\nu j}, \quad \nu=\overline{1,N},\ j=1{,}2{,}3\,. \tag{15}$$

Вводя для радиусов-векторов, сил и реакций связей сквозную нумерацию согласно соотношениям (3) и (4), перепишем уравнения (15) в следующем виде:

$$m_\mu \ddot{x}_\mu=X_\mu+R_\mu, \quad \mu=\overline{1{,}3N}\,, \tag{16}$$

где $R_\mu=R_{\nu j}, \quad \mu=\overline{1{,}3N}, \quad \nu=\overline{1,N}, \ \ j=1{,}2{,}3.$

Введя в соответствии с соотношением (10) координаты y_μ изображающей точки запишем дифференциальные уравнения несвободного движения механической системы в следующем виде:

$$M\ddot{y}_\mu=Y_\mu+\widetilde{R}_\mu\,, \tag{17}$$

где $\widetilde{R}_\mu=R_\mu\big/\sqrt{\widetilde{m}_\mu}, \qquad \mu=\overline{1{,}6N}\,.$ (18)

В декартовой системе координат $Oy_1,.....,y_{3N}$ с ортами $\vec{j}_1,\dots,\vec{j}_{3N}$ в 3N-мерном пространстве скалярным уравнениям (17) будет соответствовать векторное уравнение

$$M\vec{W}=\vec{Y}+\vec{R}\,, \tag{19}$$

где использованы 3N-мерные векторы

$$\vec{W}=\dot{\vec{V}}=\ddot{\vec{y}}, \quad \vec{y}=y_\mu \vec{j}_\mu, \quad \vec{Y}=Y_\mu \vec{j}_\mu, \quad \vec{R}=R_\mu \vec{j}_\mu, \quad \mu=\overline{1,N} \tag{20}$$

Уравнения связей (13) при введении изображающей точки запишутся следующим образом:

$$f^{\zeta}(t,y)=0, \quad y=(y_1,...,y_{3N}), \quad \zeta=\overline{1,k} \tag{21}$$

В уравнениях (17) и (21) общее число которых равно 3N+k, неизвестными являются 3N функций y_μ и 3N реакций R_μ (μ=1,3N). Таким образом, число неизвестных превосходит число уравнений на 6N-(3N+k)=3N-k. Возникает вопрос, как добиться того, чтобы число неизвестных было бы равно числу уравнений и решение задачи было однозначным.

Оказывается, что при решении этого основного вопроса в теории несвободного движения несущественным будет то, какими являются связи, голономными или неголономными. Поэтому для общности положим, что связи могут задаваться и уравнениями:

$$\varphi^{\zeta}(t,y,\dot{y})=0,\quad \zeta=\overline{1,k} \tag{22}$$

или же уравнениями

$$\psi^{\zeta}(t,y,\dot{y},\ddot{y})=a_{\mu}^{\zeta}(t,y,\dot{y})\ddot{y}_{\mu}-\chi^{\mu}(t,y,\dot{y})=0, \\ \zeta=\overline{1,k},\quad \mu=\overline{1,3N} \tag{23}$$

Дифференцируя уравнения связей (21) дважды, а уравнения (22) один раз по времени, получаем возможность представить все виды уравнений связей в единой дифференциальной форме (23). При этом в случае голономных связей (21)

$$a_{\mu}^{\zeta}=\frac{\partial f^{\zeta}}{\partial y_{\mu}},\quad \chi^{\zeta}=-\frac{\partial^2 f^{\zeta}}{\partial t^2}-2\frac{\partial^2 f^{\zeta}}{\partial t\partial y_{\mu}}-\frac{\partial^2 f^{\zeta}}{\partial y_{\mu}\partial y_{\mu 1}}\dot{y}_{\mu}\dot{y}_{\mu 1}, \\ \zeta=\overline{1,k},\quad \mu,\mu 1=\overline{1,3N},$$

а при неголономных связях (22)

$$a_{\mu}^{\zeta}=\frac{\partial\varphi^{\zeta}}{\partial\dot{y}_{\mu}},\quad \chi^{\zeta}=-\frac{\partial\varphi^{\zeta}}{\partial t}-\frac{\partial\varphi^{\zeta}}{\partial y_{\mu}}\dot{y}_{\mu}, \\ \zeta=\overline{1,k},\quad \mu=\overline{1,3N}.$$

Как известно, при наличии неголономных связей принципиально нельзя ввести меньшее число новых переменных, через которые можно было бы однозначно выразить координаты $y_{\mu},\ \ \mu=\overline{1,3N}.$ Поэтому речь может идти об использовании уравнений связей только для того, чтобы с их помощью перейти от неизвестных величин $\widetilde{R}_{\mu}$ к новым неизвестным Λ_{ζ} , число которых должно быть равно числу связей и через которые можно было бы однозначно выразить реакции $\widetilde{R}_{\mu}$.

4. Разбиение уравнениями связей 3N-мерного евклидова пространства на два подпространства. При одновременном действии активных сил и сил, порождаемых связями второй закон Ньютона имеет вид (21). В случае заданных активных сил и начальных условий движения последующее движение удастся найти только тогда, когда сила $\vec{R}$ представлена как функция времени, координат и скорости механической системы. Выясним когда и как это можно сделать.

Введем векторы

$$\vec{\varepsilon}^{\,l+\zeta}=a_{\mu}^{\zeta}\vec{j}_{\mu},\quad l=3N-k,\quad \zeta=\overline{1,k}. \tag{28}$$

При независимых связях и векторы $\vec{\varepsilon}^{\,l+\zeta}=a_{\mu}^{\zeta}\vec{j}_{\mu},\ \ \zeta=\overline{1,k}$ линейно независимы. При голономных и неголономных связях (21), (22), (23) они могут быть представлены соответственно в виде:

$$\vec{\varepsilon}^{\,l+\zeta} = \frac{\partial f^{\zeta}}{\partial y_{\mu}} \vec{j}_{\mu} = \vec{\nabla} f^{\zeta},$$

$$\vec{\varepsilon}^{\,l+\zeta} = \frac{\partial \varphi^{\zeta}}{\partial \dot{y}_{\mu}} \vec{j}_{\mu} = \vec{\nabla}' \varphi^{\zeta},$$

$$\vec{\varepsilon}^{\,l+\zeta} = \frac{\partial \psi^{\zeta}}{\partial \ddot{y}_{\mu}} \vec{j}_{\mu} = \vec{\nabla}'' \psi^{\zeta}, \tag{25}$$

$$l = 3N - k, \quad \zeta = \overline{1,k}, \quad \mu = \overline{1,3N},$$

где ∇ - оператор Гамильтона.

Введение векторов $\vec{\varepsilon}^{\,l+\zeta} = a_{\mu}^{\zeta} \vec{j}_{\mu}$ позволяет уравнение связей (23) записать следующим образом:

$$\vec{\varepsilon}^{\,l+\zeta} \cdot \vec{W} = \chi^{\zeta}(t, y, \dot{y}), \quad \zeta = \overline{1,k}. \tag{26}$$

Из этих выражений видно, что в используемом 3N-мерном пространстве целесообразно ввести в рассмотрение подпространство, базисом которого являются векторы $\vec{\varepsilon}^{\,l+\zeta}$ $\zeta = \overline{1,k}$. При этом 3N-мерное евклидово пространство можно будет представить в виде прямой суммы этого подпространства и ортогонального к нему дополнения, базисом которого являются векторы $\vec{\varepsilon}_{\lambda}$, $\lambda = \overline{1,l}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\vec{\varepsilon}^{\,l+\zeta} \cdot \vec{\varepsilon}_{\lambda} = 0, \quad \zeta = \overline{1,k}, \quad \lambda = \overline{1,l}.$$

Обозначим введенные подпространства как ”К - пространство” и ”L - пространство”. Эти подпространства позволяют представить ускорение изображающей точки в виде суммы:

$$\vec{W} = \vec{W}_L + \vec{W}^K, \quad \vec{W}_L = W^{\lambda} \vec{\varepsilon}_{\lambda}, \quad \vec{W}^K = W_{l+\zeta} \vec{\varepsilon}^{\,l+\zeta}, \quad \vec{W}_L \cdot \vec{W}^K = 0. \tag{27}$$

Отметим, что данное представление вектора $\vec{W}$ соответствует фиксированным значениям переменных $t, y_{\mu}, \dot{y}_{\mu}$($\mu = \overline{1, N}$).

Выражение (27) позволяет уравнение (19) заменить двумя уравнениями

$$M\vec{W}_L = \vec{Y}_L + \vec{R}_L, \tag{28}$$

$$M\vec{W}^K = \vec{Y}^K + \vec{R}^K. \tag{29}$$

Здесь $\vec{Y}_L = Q^{\lambda} \vec{\varepsilon}_{\lambda}, \quad \vec{Y}^K = Q_{l+\zeta} \vec{\varepsilon}^{\,l+\zeta}, \quad \vec{R}_L = R^{\lambda} \vec{\varepsilon}_{\lambda}, \quad \vec{R}^K = \Lambda_{\zeta} \vec{\varepsilon}^{\,l+\zeta}.$

Векторному уравнению (33) соответствует k скалярных уравнений

$$\Lambda_{\zeta} = MW_{l+\zeta} - Q_{l+\zeta}, \qquad \zeta = \overline{1,k}. \tag{30}$$

По предположению задаваемые k связей являются независимыми функциями (в противном случае их было бы меньше k), поэтому они задают k независимых параметров (24) или (25). В силу их независимости определитель из элементов

$$h^{\zeta,\zeta 1} = \varepsilon^{l+\zeta} \cdot \varepsilon^{l+\zeta 1}, \qquad \zeta, \zeta 1 = \overline{1,k},$$

будет не равен нулю

$$\left| h^{\zeta,\zeta 1} \right| \neq 0. \tag{31}$$

5. Идеальность связей. Покажем, что вектор $\vec{W}^K$, задаваемый компонентами $W_{l+\zeta}$ полностью определяется уравнениями связей. Действительно, из выражений (26) и (27) следует, что

$$h^{\zeta,\zeta 1}W_{l+\zeta 1} = \chi^{\zeta}(t,y,\dot{y}), \qquad \zeta,\zeta 1 = \overline{1,k}\,, \tag{32}$$

поэтому в силу свойств (31) решение системы алгебраических уравнений (32) можно представить в виде

$$W_{l+\zeta 1} = h_{\zeta 1,\zeta}\chi^{\zeta}(t,y,\dot{y}), \qquad \zeta,\zeta 1 = \overline{1,k}\,. \tag{33}$$

Здесь - $h_{\zeta 1,\zeta}$ элементы матрицы обратной по отношению к матрице элементов $h^{\zeta,\zeta 1}$.

Вектор $\vec{W}^K$, входящий в уравнение (29), является, таким образом, вектором, который как функция времени, положения системы и ее скоростей однозначно определяется уравнениями связей. Второй вектор $\vec{Y}^K$ уравнения (29) по предположению считается заданным в виде функции от тех же аргументов. Следовательно, уравнения (29) позволяют и вектор $\vec{R}^K$ найти как функцию времени, положения и скоростей системы. Из представления этого вектора в виде

$$\vec{R}^K = \Lambda_{\zeta}\,\vec{\varepsilon}^{\,l+\zeta}$$

следует, что его определение сводится к вычислению величин Λ_{ζ}, $\zeta = \overline{1,k}$ по формулам (30) и (33).

Найденная сила $\vec{R}^K$ является таким образом, той силой, которую необходимо добавить к активной силе $\vec{Y}^K$ для того, чтобы удовлетворить уравнениям связей. Покажем, что эта добавка является и достаточной для этого. Действительно, влияние уравнений связей на вектор $\vec{W}$ выражается формулой (26). Так как $\vec{\varepsilon}^{\,l+\zeta}\cdot\vec{W}^K = 0, \qquad \zeta = \overline{1,k},$ то эта формула может быть записана в виде

$$\vec{\varepsilon}^{\,l+\zeta}\cdot\vec{W}^K = \chi^{\zeta}(t,y,\dot{y}), \qquad \zeta = \overline{1,k}\,. \tag{34}$$

Отсюда следует, что связи будут выполняться при любом векторе $\vec{W}_L$ и что по виду уравнений связей о векторе $\vec{W}_L$ ничего сказать нельзя. Следовательно, в уравнения (28), не нарушая выполнения уравнений связи, можно положить $\vec{R}_L = 0$.

Как голономные, так и неголономные связи, при наличии которых можно положить $\vec{R}_L = 0$ называются идеальными связями. Из сказанного следует, что эти связи полностью определяются своими аналитическими представлениями.

Из этих представлений следует, что составляющая $\vec{W}^K$ вектора ускорения $\vec{W}$ изображающей точки полностью задается уравнениями связей в К – пространстве размерность которого равна количеству связей. В случае голономных связей каждое из уравнений (13) выражает тот факт, что система теряет степень свободы. Эти потери степеней свободы, реализуемые за счет связей элементов системы друг с другом или с другими телами, не входящими в систему, могут, конечно, привести к появлению дополнительных сил типа сухого трения. Эти силы будут совершать работу и поэтому влиять на движение системы. Ясно, что их необходимо учесть, включив в активные силы. Именно подобные силы были обозначены в уравнениях (28) через $\vec{R}_L$. Аналитическое задание уравнений связей ничего не говорит о природе этих сил, поэтому они должны описываться дополнительными характеристиками связей, зависящими от их физической реализации. Связи такого рода называют реальными (неидеальными) связями.

6. Условия разрешимости основной задачи теории несвободного движения. Таким образом, вектор реакции $\vec{R}$ может быть представлен через величины, Λ_ζ число которых равно числу связей, и этот вектор может быть выражен в виде функции времени, положения системы и ее скоростей. Это оказалось возможным, во-первых, когда уравнения связей независимы, и, во-вторых, когда вектор $\vec{R}_L$, который непосредственно никак не связан с уравнениями связей, равен нулю, т.е. в случае идеальной связи.

Независимость уравнений связей сводится к неравенству нулю определителя

$$\left|h^{\zeta,\zeta 1}\right| \neq 0.$$

В случае голономных связей вида (21) это условие запишется как:

$$\left|h^{\zeta,\zeta 1}\right| = \sum \pm \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_{\mu 1}} \cdot \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_{\mu 2}} \cdots \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_{\mu k}} \neq 0,$$

при неголономных связях вида (22)

$$\left|h^{\zeta,\zeta 1}\right| = \sum \pm \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \dot{x}_{\mu 1}} \cdot \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \dot{x}_{\mu 2}} \cdots \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \dot{x}_{\mu k}} \neq 0,$$

где $\mu 1, \mu 2, \ldots, \mu k$ - каждый раз, какие - либо различные числа из ряда 1, 2, ..., k, т. е. суммирование ведется по всем $k!$ перестановкам ($\mu 1, \mu 2, \ldots, \mu k$) из чисел 1, 2, ... k.

На основании соотношений (28), (29) при идеальных связях закон Ньютона можно представить следующим образом

$$M\vec{W} = \vec{Y} + \Lambda_\zeta \vec{\varepsilon}^{\,l+\zeta}, \qquad \zeta = \overline{1,k}\,. \tag{35}$$

Здесь вектор реакции при идеальных соответственно голономных и неголономных связях задается в виде:

$$\vec{R} = \Lambda_\zeta \vec{\nabla} f^\zeta,$$

$$\vec{R} = \Lambda_\zeta \vec{\nabla}' f^\zeta,$$

$$\vec{R} = \Lambda_\zeta \vec{\nabla}'' f^\zeta,$$

$$\zeta = \overline{1,k}$$

Из этих формул и выражений (7), (16) и (18) следует, что движение голономных и неголономных систем описывается уравнениями

$$m_\mu \ddot{x}_\mu = X_\mu + \Lambda_\zeta \frac{\partial f^\zeta}{\partial x_\mu}, \quad \mu = \overline{1, 3N}, \quad \zeta = \overline{1, k}, \tag{36}$$

$$m_\mu \ddot{x}_\mu = X_\mu + \Lambda_\zeta \frac{\partial f^\zeta}{\partial \dot{x}_\mu}, \quad \mu = \overline{1, 3N}, \quad \zeta = \overline{1, k}, \tag{37}$$

$$m_\mu \ddot{x}_\mu = X_\mu + \Lambda_\zeta \frac{\partial f^\zeta}{\partial \ddot{x}_\mu}, \quad \mu = \overline{1, 3N}, \quad \zeta = \overline{1, k}. \tag{38}$$

Уравнения (36) - (38) называются уравнениями Лагранжа первого рода в декартовых координатах для голономных и неголономных систем. Величины Λ_ζ, входящие в эти уравнения называются обобщенными реакциями, а также множителями Лагранжа. Они, как следует из выражений (30), (33), однозначно определяются уравнениями связей и активными силами в виде функций от $t, x, \dot{x}$. Следовательно, используя уравнения (36) - (38) всегда можно найти движение, удовлетворяющее уравнениям связей. Уравнения (36) - (38), число которых равно 3N содержат 3N+k неизвестных $x_1,\dots,x_{3N},\Lambda_1,\dots,\Lambda_k$, поэтому их надо рассматривать совместно с уравнениями связей, число которых равно k.

Литература:

1. **Згежда С.А.** Уравнения динамики неголономных систем со связями высших порядков. 1 [Текст] / Н.Г. Филиппов, М.П. Юшков // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1998. Вып. 3 (N 15). С. 75 - 81.
2. **Згежда С.А.** Уравнения динамики неголономных систем со связями высших порядков. II [Текст] / Н.Г. Филиппов, М.П. Юшков // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1998. Вып. 4 (N 22). С. 94 - 99.
3. **Поляхов Н.Н.** Теоретическая механика [Текст] /С.А. Зегжда, М.П. Юшков //Л.: 1985. 535 с.