УДК:512.86

Сатаров Жоомарт, д. ф-м.н., профессор,
Ахунбек кызы Мадина - магистрант,
Ошский технологический университет

СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ В ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ НАД РАДИКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Используястандартные формы находятся образующие и соотношения обобщенной элементарной линейной группы над радикальнымкольцом.

Ключевые слова: Радикальные кольцо, обобщенная линейная группа, трансвекция, алфавит, соотношения, стандартные формы.

Satarov Zhoomart - Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Ahunbek kyzy Madina – graduate student,
Osh Technologycal University

THE STANDARD FORMS IN LINEAR GROUPS OVER A RADICAL RING ANDTHEIRAPPLICATIONS

Using the standard forms there are generators and relations of the generalized elementary linear group over the radical ring.

Key words: Radical ring, generalized liner group, transvection, alphabet, relations, standard forms.

Описание линейных групп через образующие и соотношения составляет один из основных вопросов в комбинаторной теории групп. В названном направлении уже выполнено большое количество исследований, см., например, [1]–[3] и др. Но все эти результаты получены в случае, когда основное кольцо имеет 1. С 1998года начаты исследования в указанном направлении для основных колец, вообще говоря не имеющих 1, см. об этом [4]. А точнее в [4] одним из авторов выявлялись образующие и соотношения обобщенной полной линейной группы $GL^{\circ}(n,\Lambda),\, n\geq 2,$ над полулокальнымкольцом Λ вообще говоря без 1. В этой работе используя стандартные формы мы находим образующие и определяющие соотношения обобщенной элементарной линейной группы $GL^{\circ}(n,\Lambda),\, n\geq 2$, над произвольным радикальным кольцом $R\neq\{0\}$. Как мы увидим ниже, в таком кольце R единичный элемент 1отсутствует вообще.

Приводим необходимые определения. Пусть $\Lambda-$ассоциативное кольцо и $\circ-$его квазиумножение, т.е. $x\circ y=x+xy+y$. Элемент x из Λ называется квазиобратимым, если для него выполнены равенства $x\circ y=0=y\circ x$ при некотором $y\in\Lambda$. По квазиобратимому x его квазиобратное $y=x'$ всегда определяется однозначно. Множество всех квазиобратимых элементов Λ° из Λ образует группу относительно операции $\circ$ (единицей в этой группе будет нуль). Поскольку в случае наличия 1 в Λ отображение $\Lambda^{\circ}\to\Lambda^{\bullet},\ x\to 1+x$ ($^{\bullet}-$взятие мультипликативной группы), задает изоморфизм, группа Λ° является обобщением понятия мультипликативной группы $\Lambda^{\bullet}$ на самые общие случаиассоциативных колец. Напомним, что ассоциативное кольцо Λ называется радикальным (см. [5]), если оно совпадает со своей квазигруппой Λ°.

Нетривиальный пример радикального (а точнее простого радикального) кольца найден в [6]. Введенные кольца интересны уже по своему необычайному определению.

Ниже R будет означать некоторое радикальное кольцо. Поскольку здесь нулевой случай $R=\{0\}$ тривиален, его мы далее будем считать отличным от нуля. Очевидно, всякое такое кольцо не имеет 1 (ибо в противном случае мы имели бы $-1\notin R^{\circ}$, т.е. R° не будет совпадать с R). Через $GL^{\circ}(n,R)$ обозначается группа квазиобратимых матриц из полного матричного кольца $M(n,R)$ и она называется обобщенной полной линейной группой степени n над кольцом R.

В работе действуют следующие обозначения: $t_{ij}(x)\,(i\neq j)-$ квазитрансвекция, т.е. матрица из $M(n,R)$, где на позиции $\langle i,j\rangle$ стоит элемент x, а все прочие позиции заполнены нулями; $D_i(\varepsilon)\,(i<n)-$ диагональная матрица из $M(n,R)$, которая отличается от нулевой матрицы лишь двумя позициями $\langle i,i\rangle, \langle n,n\rangle$, где стоят элементы ε и ε' соответственно; $D_n(\delta)-$ матрица (также диагональная) из $M(n,R)$, отличающаяся от нулевой матрицы лишь одной позицией $\langle n,n\rangle$, где стоит элемент δ; $f_i=t_{i,i+1}(\alpha_{i+1})\circ\ldots\circ t_{in}(\alpha_n)-$ горизонтальная форма ступени i; $g_i=t_{i+1,i}(\beta_{i+1})\circ\ldots\circ t_{ni}(\beta_n)-$ вертикальная форма ступени i; $[R^{\circ},R^{\circ}]-$ коммутант группы R° (т.е. ее подгруппа, порожденная всеми коммутаторами $[x,y]=x'\circ y'\circ x\circ y$, $x,y\in R^{\circ}$).

Равенства $t_{ij}(\alpha)\circ t_{ij}(-\alpha)=0,\ D_k(\varepsilon)\circ D_k(\varepsilon')=0$ показывают что (элементарные) матрицы $t_{ij}(\alpha),\ i\neq j;\ D_k(\varepsilon),\ k<n\ (\alpha,\varepsilon\in R, 1\leq i,k,j\leq n)$ (1)
являются некоторыми элементами группы $GL^{\circ}(n,R)$. Подгруппу $GL^{\circ}(n,R)$, порожденную перечисленными квазиобратимыми матрицами (1), обозначим через $GE^{\circ}(n,R)$ и назовем ее *обобщенной элементарной линейной группой* степени n над кольцом R. Нашей целью в настоящей работе, как мы отметили выше, является представление этой группы $GE^{\circ}(n,R)$, $n\geq 2$, в терминах образующих и соотношений. Обозначим через $G(R)$ совокупность тех элементов x из R, для которых матрицы $D_2(x)=\begin{pmatrix}\circ & \circ\\ \circ & x\end{pmatrix}$ являются некоторыми словами алфавита

$$t_{12}(\alpha)=\begin{pmatrix}\circ & \alpha\\ \circ & \circ\end{pmatrix},\ t_{21}(\beta)=\begin{pmatrix}\circ & \circ\\ \beta & \circ\end{pmatrix},\ D_1(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\varepsilon & \circ\\ \circ & \varepsilon'\end{pmatrix},\ \alpha,\beta,\varepsilon\in R. \quad (*)$$

Такая $G(R)$ очевидным образом образует подгруппу в R°. Поскольку для любых $x,y\in R^{\circ}$ $D_2([x,y])=D_2(x'\circ y'\circ x\circ y)=D_1(x)\circ D_1(y)\circ D_1(y'\circ x')$, для введенной группы имеет место (групповое) включение $[R^{\circ},R^{\circ}]\leq G(R)$ (здесь нормальность $\leq$ следует из инвариантности коммутанта в самой группе). Как показывают кольцево-операторные разложения

$$D_1(\varepsilon)=t_{12}(\varepsilon)\circ t_{21}(1)\circ t_{12}(\varepsilon')\circ t_{21}(-\varepsilon-1)$$

(здесь $1-$ тождественный оператор, а $-\varepsilon-1-$ оператор, действующий справа как $x(-\varepsilon-1)=-x\varepsilon-x$, сохраняя группу $G(R)$ удалить буквы $D_1(\varepsilon)$ из состава (*) (как, например, в случае тел), заведомо, нельзя.

Совершенно аналогичным образом можно ввести и группу $G_n(R)$, составляя ее из тех элементов $x \in R$, для которых матрицы $D_n(x)$ являются какими-то словами алфавита (1). Но чуть погодя мы увидим, что эта группа просто-попросту будет совпадать с аналогичной группой с номером $n-1$ т.е. $G_n(R) = G_{n-1}(R)$. Спускаясь так и далее, мы приходим к равенству $G_n(R) = G_2(R) = G(R)$. Итак, случаи $n \geq 3$ какую-нибудь новую группу для значений $D_n(x)$ нам давать не будут.

Группу $GE^{\circ}(n, R)$ мы будем представлять относительно ее же порождающей системы

$$t_{ij}(\alpha), i \neq j;\ D_k(\varepsilon),\ k < n;\ D_n(\delta)\ (\alpha, \varepsilon \in R, \delta \in G(R), 1 \leq i, k, j \leq n). \quad (2)$$

В указанном алфавите имеют место следующие (проверяемые напрямую) соотношения:

1. $D_k(\varepsilon) \circ D_k(\delta) = D_n([\varepsilon, \delta]) \circ D_k(\varepsilon \circ \delta),\ k < n;$
2. $D_i(\varepsilon) \circ D_k(\delta) = D_n([\varepsilon, \delta]) \circ D_k(\delta) \circ D_i(\varepsilon),\ i \neq k,\ i,\ k < n;$
3. $D_n(\varepsilon) \circ D_n(\delta) = D_n(\varepsilon \circ \delta);$
4. $D_n(\varepsilon) \circ D_k(\delta) = D_k(\delta) \circ D_n([\delta', \varepsilon'] \circ \varepsilon),\ k < n;$
5. $t_{in}(\alpha) \circ D_i(\varepsilon) = D_i(\varepsilon) \circ t_{in}(\beta)$, где $\beta = \alpha + \alpha\varepsilon' + \varepsilon'(\alpha + \alpha\varepsilon');$
6. $t_{ni}(\alpha) \circ D_i(\varepsilon) = D_i(\varepsilon) \circ t_{ni}(\beta)$, где $\beta = \alpha + \alpha\varepsilon + \varepsilon(\alpha + \alpha\varepsilon);$
7. $t_{ij}(\alpha) \circ D_i(\varepsilon) = D_i(\varepsilon) \circ t_{ij}(\alpha + \varepsilon'\alpha),\ i, j < n;$
8. $t_{nj}(\alpha) \circ D_k(\varepsilon) = D_k(\varepsilon) \circ t_{nj}(\alpha + \varepsilon\alpha),\ j \neq k < n;$
9. $t_{ik}(\alpha) \circ D_k(\varepsilon) = D_k(\varepsilon) \circ t_{ik}(\alpha + \alpha\varepsilon),\ i,k<n;$
10. $t_{in}(\alpha) \circ D_k(\varepsilon) = D_k(\varepsilon) \circ t_{in}(\alpha + \alpha\varepsilon'),\ i \neq k < n;$
11. $t_{ij}(\alpha) \circ D_k(\varepsilon) = D_k(\varepsilon) \circ t_{ij}(\alpha),\ k < n,\ \{i, j\} \cap \{k, n\} = \emptyset;$
12. $t_{nj}(\alpha) \circ D_n(\delta) = D_n(\delta) \circ t_{nj}(\alpha + \delta'\alpha);$
13. $t_{in}(\alpha) \circ D_n(\delta) = D_n(\delta) \circ t_{in}(\alpha + \alpha\delta);$
14. $t_{ij}(\alpha) \circ D_n(\delta) = D_n(\delta) \circ t_{ij}(\alpha),\ i, j < n;$
15. $t_{ij}(\alpha) \circ t_{ij}(\beta) = t_{ij}(\alpha + \beta);$
16. $t_{in}(\alpha) \circ t_{ni}(\beta) = t_{ni}(\beta + \beta\varepsilon') \circ D_i(\varepsilon) \circ D_n(\varepsilon \circ \delta) \circ t_{in}(\alpha + \varepsilon'\alpha);$
17. $t_{ij}(\alpha) \circ t_{ji}(\beta) = t_{ji}(\beta + \beta\varepsilon') \circ D_i(\varepsilon) \circ D_j(\delta) \circ D_n(\delta \circ \varepsilon) \circ t_{ij}(\alpha + \varepsilon'\alpha),$ $i, j < n;$
18. $t_{ik}(\alpha) \circ t_{kj}(\beta) = t_{ij}(\alpha\beta) \circ t_{kj}(\beta) \circ t_{ik}(\alpha),\ i \neq j;$
19. $t_{ik}(\alpha) \circ t_{rj}(\beta) = t_{rj}(\beta) \circ t_{ik}(\alpha),\ i \neq j, k \neq r$,

где в сериях 16 и 17 $\varepsilon = \alpha\beta,\ \delta = -\beta(\alpha + \varepsilon'\alpha)$.

Нашей дальнейшей целью является показать полноту системы соотношений 1 — 19 для группы $GE^{\circ}(n, R)$. Доказательство полноты мы проводим методом трансформации, развитым в [4]. Названный метод использует стандартные формы элементов группы $GE^{\circ}(n, R)$. Стандартными формами в $GE^{\circ}(n, R)$ мы объявляем всевозможные слова алфавита (2) вида

$$w = g_1 \circ \ldots \circ g_{n-1} \circ D_1(\varepsilon_1) \circ \ldots \circ D_n(\varepsilon_n) \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1. \quad \text{(sf)}$$

Элементы указанной группы представляются в виде(sf) единственным способом.

Далее мы на множестве всех слов алфавита (2) вводим отношения $\overset{i}{\underset{\to}{\sim}}$, $1 \le i < n$, положив $\omega \overset{i}{\underset{\to}{\sim}} \nu$ в том и только том случае, когда эти слова связаны соотношением $\omega = x \circ \nu$, где X – некоторое слово, не содержащее трансвекции вида $t_{k<j}(\alpha)$, $\alpha \ne 0$, $k \le i$. Нам нужны и отношения $\overset{\sim}{\underset{i}{\to}}$ $1 \le i < n$, определенные как $\omega \overset{\sim}{\underset{i}{\to}} \nu$ тогда и только тогда, когда для этих слов верно соотношение $\omega = \nu \circ \mathrm{Y}$ при некотором Y, где слово Y не содержит буквы вида $t_{k>j}(\alpha)$, $\alpha \ne 0$, $j \le i$. Все эти отношения являются рефлексивными и транзитивными. Если в форме $f_i = t_{i,i+1}(\alpha_{i+1}) \circ \ldots \circ t_{in}(\alpha_n)$ ее аргумент α_p равен нулю, то этот факт мы условимся подчеркивать как $f_i(\ne p)$. Ниже аналогичный смысл придается и записям $f_i(\ne p, q)$, $g_i(\ne p)$, $g_i(\ne p, q)$.

Имеет место следующая

Теорема 1 (о трансформации букв справа). *Пусть* $0 \ne f$ – *произвольная горизонтальная форма ступени* i *и* x – *также произвольная ненулевая буква алфавита (2), для которой при* $x = t_{p<q}(\alpha)$ $(\alpha \ne 0)$ *считается выполненным условие* $p \ge i$. *Для них применяя соотношения 5-7-9-11 и 13-19, можно выполнить преобразование* $\nu = f_i \circ x \overset{i}{\underset{\to}{\sim}} \tilde{f}_i$ *, где* $\tilde{f}_i$ – *некоторая (также горизонтальная) форма ступени* i.

Доказательство. Оно комбинаторное и различает следующие случаи.

I. $x = D_k(\varepsilon)$.

Здесь мы применяя соотношения5,7,9,11,13,14, имеем $\nu = f_i \circ D_k(\varepsilon) = D_k(\varepsilon) \circ \tilde{f}_i \overset{i}{\underset{\to}{\sim}} \tilde{f}_i$, где $\tilde{f}_i$ – некоторая горизонтальная форма ступени i.

II. $x = t_{pq}(\alpha)$.

Этот случай мы разбиваем на следующие подслучаи.

a) Если $p < i$ $(\to p > q$ по условию теоремы) или $q < p = i$, то применяя соотношения перестановочности 19, к требуемой форме мы приходим так $\upsilon = f_i \circ t_{pq}(\alpha) = t_{pq}(\alpha) \circ \tilde{f}_i \overset{i}{\underset{\to}{\sim}} \tilde{f}_i$.

b) $p = i < q$. Здесь мы используя соотношения 19 и 16, будем иметь $\nu = f_i(\ne q) \circ [t_{iq}(\alpha_q) \circ t_{iq}(\alpha)] = f_i(\ne q) \circ t_{iq}(\alpha_q + \alpha) = \tilde{f}_i \overset{i}{\underset{\to}{\sim}} \tilde{f}_i$.

c) $q = i < p$. Применяя соотношения 5,7,10,11,13-15 и 16-19, выполним следующие преобразования

$$\nu = f_i(\ne p) \circ [t_{ip}(\alpha_p) \circ t_{pi}(\alpha)] \overset{i}{\underset{\to}{\sim}} \tilde{f}_i(\ne p) \circ t_{pi}(\alpha + \alpha\varepsilon') \circ t_{ip}(\alpha_p + \varepsilon'\alpha_p) =$$

$$\tilde{f}_i(\ne p, k) \circ [t_{ik}(\beta_k) \circ t_{pi}(\alpha + \alpha\varepsilon')] \circ t_{ip}(\alpha_p + \varepsilon'\alpha_p) =$$

$$[\tilde{f}_i(\ne p, k) \circ t_{pk}\{-(\alpha + \alpha\varepsilon')\beta_k\}] \circ t_{pi}(\alpha + \alpha\varepsilon') \circ t_{ik}(\beta_k) \circ t_{ip}(\alpha_p + \varepsilon'\alpha_p) \overset{i}{\underset{\to}{\sim}}$$

$$[\tilde{f}_i(\ne p, k) \circ t_{pi}(\alpha + \alpha\varepsilon')] \circ t_{ik}(\beta_k) \circ t_{ip}(\alpha_p + \varepsilon'\alpha_p) \overset{i}{\underset{\to}{\sim}} \ldots \overset{i}{\underset{\to}{\sim}}$$

$$t_{pi}(\alpha + \alpha\varepsilon') \circ \tilde{f}_i \overset{i}{\underset{\to}{\sim}} \tilde{f}_i.$$

Конечные члены полученной цепочки и показывают на правильность теоремы в этом случае.

d) $q < i < p$. Здесь мы применяя соотношения 18 и 19, получаем

$$v = f_i(\neq p)\circ\left[t_{ip}(\alpha_p)\circ t_{pq}(\alpha)\right] = \left[f_i(\neq p)\circ t_{iq}(\alpha_p\alpha)\circ t_{pq}(\alpha)\right]\circ t_{ip}(\alpha_p\alpha) =$$

$$t_{iq}(\alpha_p\alpha)\circ t_{pq}(\alpha)\circ f_i(\neq p)\circ t_{ip}(\alpha_p)\overset{i}{\underset{\to}{\sim}} f_i.$$

e) $i < p, q(p \neq q)$. Используя соотношения 19,18 и 15, здесь мы будем иметь

$$v = f_i(\neq p)\circ\left[t_{ip}(\alpha_p)\circ t_{pq}(\alpha)\right] f_i(\neq p,q)\circ\left[t_{iq}(\alpha_q)\circ t_{iq}(\alpha_p\alpha)\right]\circ t_{pq}(\alpha)\circ t_{ip}(\alpha)$$

$$= f_i(\neq p,q)\circ\left[t_{iq}(\alpha_q+\alpha_p\alpha)\circ t_{pq}(\alpha)\right]\circ t_{ip}(\alpha_p) = \left[f_i(\neq p,q)\circ t_{pq}(\alpha)\right]\circ t_{iq}(\alpha_q+\alpha_p\alpha)\circ$$

$$t_{ip}(\alpha_p) = t_{pq}(\alpha)\circ \tilde{f}_i \overset{i}{\underset{\to}{\sim}} \tilde{f}_i.$$

Итак, во всех имеющихся случаях преобразование $v \overset{i}{\underset{\to}{\sim}} \tilde{f}_i$ действительно выполняется.

Нам нужна Теорема 2 (о трансформации букв слева). *Пусть* $g_i -$ *произвольная ненулевая вертикальная форма ступени* i *и* $0 \neq y -$ *также произвольная буква из (2), причем при* $y = t_{pq}(\alpha)$ $(\alpha \neq 0)$ *считается* $p, q \geq i$ *и* $p < q \to p > i$. *Для них применяя соотношения 5-15 и 18,19, можно выполнит преобразование* $v = y\circ g_i \underset{i}{\to} \tilde{g}_i$, *где* $\tilde{g}_i -$ *вертикальная форма ступени* i.

Доказательство. И оно проводится аналогично доказательству теоремы 1 и чуть проще.

I. $y = D_k(\varepsilon)$.

В этом случае используя соотношения 5-14,требуемую форму мы будем иметь как $v = D_k(\varepsilon)\circ g_i = \tilde{g}_i\circ D_k(\varepsilon)\underset{i}{\to}\tilde{g}_i$ где $\tilde{g}_i -$ некоторая вертикальная форма ступени i.

II. $y = t_{pq}(\alpha)$.

Этот пункт разбивается на следующие два подслучая.

a) В случаях, когда $p < q$ $(\to p > i$ по условию теоремы) или же $i < q < p$, применяя соотношения 19,18,15 мы нужную форму получаем как

$$v = \left[t_{pq}(\alpha)\circ t_{pi}(\alpha_p)\right]\circ g_i(\neq p) = t_{pi}(\alpha_p)\circ\left[t_{pq}(\alpha)\circ t_{qi}(\alpha_q)\right]\circ g_i(\neq p,q) =$$

$$= \left[t_{pi}(\alpha_p)\circ t_{pi}(\alpha\alpha_q)\right]\circ t_{qi}(\alpha_q)\circ\left[t_{pq}(\alpha)\circ g_i(\neq p,q)\right] =$$

$$= \left[t_{pi}(\alpha_p+\alpha\alpha_q)\circ t_{qi}(\alpha_q)\circ g_i(\neq p,q)\right]\circ t_{pq}(\alpha)\underset{i}{\to}\tilde{g}_i.$$

b) $q = i$ $(\to p > i)$. Здесь мы используя соотношения 15,19, к требуемому виду приходим так $v = \left[t_{pi}(\alpha)\circ t_{pi}(\alpha_p)\right]\circ g_i(\neq p) = t_{pi}(\alpha+\alpha_p)\circ g_i(\neq p) = \tilde{g}_i \underset{i}{\to}\tilde{g}_i$.

Сформулируем теперь утверждение о стандартном строении в группе $GE^{\circ}(n,R)$.

Теорема 3. *Пусть* $w -$ *произвольное слово алфавита (2). Применяя соотношения 1-19, его можно преобразовать и стандартному виду (sf).*

Доказательство использует теоремы 1, 2 и проводится как в работе [4]. Эти повторяющиеся подробности мы здесь опускаем.

Итак, слово w можно считать приведенным к виду $w = g_1\circ D_1(\varepsilon_1)\circ T\circ g_1$ (4) при помощи соотношений $1-19$.

Отвлекаясь здесь на короткое время, возвращаемся к вопросу о группах $G_{n-1}(R)$ и $G_n(R)$.Пусть $\delta -$произвольной элемент из $G_n(R)$. Это по определению означает, что

$D_n(\delta)$ есть некоторое слово w алфавита (2). Представив это слово в виде разложения (4), имеем равенство $D_n(\delta) = g_1 \circ D_1(\varepsilon_1) \circ T \circ f_1$. Но последнее возможно, как легко видеть, только при $g_1 = D_1(\varepsilon_1) = f_1 = 0$. А это означает, что $D_n(\delta)$ можно представить и в виде некоторого слова алфавита $t_{ij}(\alpha), i \neq j;\ D_k(\varepsilon),\ k < n\ (\alpha, \varepsilon \in R, 2 \leq i, k, j \leq n)$, т.е. имеем $G_n(R) \leq G_{n-1}(R)$. Последнее вместе с очевидным включением $G_{n-1}(R) \leq G_n(R)$ даст нам и $G_n(R) = G_{n-1}(R)$.

Вытягивая теперь аналогично из T (в(4)) формы $g_2, D_2(\varepsilon_2), f_2$, применяя затем соотношения 8,11, заданное слово представим в виде

$w = g_1 \circ g_2 \circ D_1(\varepsilon_1) \circ D_2(\varepsilon_2) \circ S \circ f_2 \circ f_1$,

где $S -$ слово, не содержащее буквы вида $t_{pq}(\alpha), \alpha \neq 0$, с $p \leq 2$ или $q \leq 2$, и $D_k(\varepsilon), \varepsilon \neq 0, k \leq 2$, и т.д. Описанной процесс отщеплений на $(n-1)-$м шаге и приводит нас к стандартной записи (sf). Теорема 3 доказана в полном объеме.

Теперь упомянутый в начале статьи вопрос об образующих и соотношениях группы $GE^{\circ}(n, R)$ может быт решен попутно и как почти прямое следствие из теоремы 3. Действительно взяв в качестве порождающей системы алфавит (2)(группа $GE^{\circ}(n, R)$ порождается им по определению), рассмотрим произвольно соотношение $w = 0$. Применяя к слову w теорему 3 (т.е. записывая его в стандартном виде при помощи соотношений 1-19), преобразуем заданное соотношения к виду

$$g_1 \circ ... \circ g_{n-1} \circ D_1(\varepsilon_1) \circ ... \circ D_n(\varepsilon_n) \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_1 = 0.$$

Поскольку стандартная запись всегда единственна, последнее возможно только при нулевых буквах левой части. А это означает зависимость соотношения $w = 0$ от соотношений 1-19. Таким образом, элементарная линейная группа над радикальным кольцом $R \neq \{0\}$ генетически может быть описана как $GE^{\circ}(n, R) = ((2) // 1-19)\ (n \geq 2)$.

Литература:

1. Романовский Н.С. Образующие и определяющие соотношения полной линейной группы над локальным кольцом // Сиб.мат.ж., 1971.—т. 13, №4.—С. 992—926.
2. GreenS.M. Generatorsandrelationsforthespeciallineargroupoveradivisionring //Proc. Amer. Math. Soc., 1977,62,N2,P.229—232.
3. НосковТ.А. Порождающие элементы и определяющие соотношения симплектических групп над некоторыми кольцами // Мат. заметки.—1974.—т.16, №2.—С. 237—246.
4. Сатаров Ж. Образующие элементы и определяющие соотношения в линейных группах// Автореферат дисс. на соискание ученой степ. доктора физ.-мат. наук.- Красноярск, 1998.—29с.
5. Курош А.Г. Общая алгебра. Лекции 1969—1970 учебного года// М.: Наука, 1974, 160с.
6. SasiadaE.Solutionoftheproblemontheexistence of a simple radical ring // Bull. Acad. polon.sei., Ser. Math., astronom., phys., 1961,9, №4. –P. 257.