УДК 512.86

Сатаров Жоомарт - д.ф.-м.н., профессор,
Ошский технологический университет,
Александр Александрович Пащевский - к.ф.-м.н., доцент,
Кубанский государственный университет

ОПИСАНИЕ ДИКА ПРОЕКТИВНОЙ ПОЛНОЙ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ НАД КОММУТАТИВНЫМ ПОЛУЛОКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ

В статье выявляют образующие и соотношения проективной полной симплектической группы над произвольным коммутативным полулокальным кольцом, не обязательно обладающим 1.

Ключевые слова: проективная симплектическая группа, образующие и соотношения, центр группы, аннулятор, скалярная матрица.

Satarov Zhoomart - Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Osh Technologycal University,
Alexander Alexandrovich Paschevsky candidate Physics and Mathematics,
Associate professor, Kuban State University

DYCK`S DESCRIPTION OF A PROJECTIVE FULL SYMPLECTIC GROUP OVER A COMMUTATIVE SEMILOCAL RING

The article identifies generators and relations of a projective full symplectic group over an arbitrary commutative semilocal ring, not necessarily possessing1.

Key words: projective symplectic group, generators and relations, group center, annihilator, scalar matrix.

Представление линейных (и близких к ним) групп на языке образующих и соотношенийявляется одним из важных вопросов современной комбинаторной теории групп. К числу названных задач можно отнести и задачу описания проективных факторов (т.е.фактор-групп по центрам) отдельныхлинейных групп над некоторымиассоциативными кольцами. В качестве подтверждения к сказанному можно называть работы [1]−[4], где выявлялись диковские описания некоторыхпроективныхлинейных групп над ассоциативными кольцами с 1.Но начиная с 2006 года (см., например, работы [5], [6]) были начаты исследования по нахождению образующих и соотношенийлинейных групп над отдельными классами ассоциативных колец, не обязательно имеющих 1.

Нашей целью в этой работе является выявление образующих и соотношений проективной полной симплектической группы $PSp^{\circ}(2n,R)$ степени $2n$ надпроизвольныmассоциативно-коммутативнымполулокальным кольцом R, необязательнообладающим 1. Нашиисследования здесь будут существенным образом опираться на результаты работы [7] и использует ее обозначения.В [7] была найдена полная для $Sp^{\circ}(2n,R)$ системасоотношений $1-12$ в образующих (2). Требуемое диковское описание для группы $PSp^{\circ}(2n,R)$ здесь будет выявляться по следующему плану: а) сначала выявляется центр C=cent $Sp^{\circ}(2n,R)$ группы $Sp^{\circ}(2n,R)$ относительно алфавита (2); в) затем приравниванием к нулю всех центральных слов составляютсясоотношения {w=0},где w прибегает C (т,е.соотношения C=0);c) присоединениемк основным соотношениям 1−12 всех «центральныхсоотношении» С=0 и получается требуемое описание Дика $PSp^{\circ}(2n,R)=\{(2)/\!\!/1-12,C=0\}$.

Ниже будут действовать следующие обозначения: $\sigma_k(X_1,\dots,X_m)$− основной симметрический многочлен степени к,l ≤ k ≤ m, от переменных $X_1,\dots,X_m$; d(ε)=diag($\varepsilon,\dots,\varepsilon$)−скалярная матрица порядка $2n$, $\varepsilon\in R^{\circ}$; C=cent $Sp^{\circ}(2n,R)$ −центр группы $Sp^{\circ}(2n,R)$;I $=AnnR$ =$\{\ \alpha\in R:\alpha x=0$ при всех $x\in R\ \}$−аннулятор кольца R.Положив в определении $AnnR$ $x=e_1+\dots+e_m$ (e_i−про- образ единицы $1_i\in\kappa_i$ при естественномэпиморфизме $R\to\bar{R}, y\to y+J=\bar{y}$), легко видеть, что аннулятор I образует подидеал радикала J .

Сперва мы охарактеризуем элементы из С.

Теорема 1.*Матрица* $a=(a_{kq})_{1\le k,q\le 2n}$ *из* $Sp^{\circ}(2n,R)$ *принадлежит центру С тогда и только тогда, когда для нее*

$$a_{qq}\equiv a_{11}(\operatorname{mod} I), q=2,\dots n,\quad \text{и}\quad a_{11}\circ a_{11}\equiv a_{kq}\equiv 0(\operatorname{mod} I)\ \text{при всех}\ k\neq q. \qquad (C)$$

Доказательство. Пусть матрица a−центральна. Возьмем произвольно номера $k,q\in I(2n),k\neq q.$ Пусть далее, i,j−такие номера из $I(2mn)$ (они также произвольные), что $p(i)=k$ и $p(j)=q.$ Сравнение в обеих частях $a\circ t_{ij}(\alpha_i)=t_{ij}(\alpha_i)\circ a$ позиций $<k,k>$ дает нам $\alpha_j a_{qk}=0$ (α_i−любой элемент R_i). Тогда при всех $\alpha=\alpha_1+\dots+\alpha_m$ из $R_1+\dots+R_m=R$ будем иметь $\alpha a_{qk}=\sum_{1\le i\le m}\alpha_i a_{qk}=0,$ т.е имеем

$a_{qk}\in I.$ (I)

Аналогичным образом дляq,$1<q\le n+1,$ и «внутренних» номеров $i,j\in I(2mn), p(i)=1, p(j)=q$ сравнивая в $a\circ t_{ij}(\alpha_i)=t_{ij}(\alpha_i)\circ a$ позиции $<1,q>,$ мы приходим к $\alpha_i(a_{11}-a_{qq})=0.$ Последнее,как и ваше, дает нам $\alpha(a_{11}-a_{qq})=0$ (также при всех $\alpha\in R$),т.еимеем $a_{qq}\equiv a_{11}(\operatorname{mod} I).$ Интерпретируем теперь a как клеточную матрицу $a=\begin{pmatrix} X & Y\\ Z & T\end{pmatrix}$ с клетками порядка $n.$ Тогда первое равенство из (Sp°) (см.работу [7] и (I) дают нам следующие имиликации:

$$X-YZ^T+XT^T+T^T=0\to X\circ T^T=0\to a_{11}\circ a_{n+1,n+1}=0\to a_{11}\circ(a_{11}+x)=0$$

при некатором $x\in I\to a_{11}\circ a_{11}=-x\in I.$ Справедливость теоремы в указанную сторону установлена.

Пусть теперь, обратно, a удовлетворяеттребованиям(С). Равенство $X\circ T^T=0$ ($X,T-$ диагональные клетки матрицы a), как и ваше, здесь дает нам $a_{qq}\circ a_{q+n,q+n}=0, q=1,\dots,n.$ Далее, условие $a_{11}\circ a_{11}=x\in I$ и равенство $x'=-x$ показывают, что $a'_{11}=a_{11}\circ x'=a_{11}-x.$ Поэтому для указанных значений q , ввиду (С) и установленного только что факта, справедливо.

$$a_{q+n,q+n}=a'_{qq}=(a_{11}+y)'=a_{11}-y=a_{11}-(x+y)\equiv a_{11}(\operatorname{mod} I)$$

(здесь y−также некоторый аннуляторный элемент). Итак, при выполнении требований (С) рассматриваемая матрица предоставляется в виде $a=d(a_{11})+\tilde{a},$ где $\tilde{a}-$некоторая матрица из $M(2n,I).$ А то, что всякая такая сумма

$d(a_{11})+a$ принадлежит центру C, теперь уже очевидно. Доказательство теорема 1 закончено.

Возьмем теперь произвольно матрицу $a \in C$ и истолковываем ее в развернутом виде $a=(\tilde{a}_{ij})_{1\le i,j\le 2mn}(i \equiv j(\operatorname{mod} m))$. Включение $I \subseteq J$ показывает, что произведя в ней отщепления как в [7] (подробно как в [8]) естественными квазитрансвекциями $t_{km,qm}(*), <km, qm> \in A,$ можно представить ее в (полуприведенном) стандартном виде

$$a = g_m \circ g_{2m} \circ \ldots \circ g_{nm} \circ D \circ F_{nm} \circ \ldots \circ F_{2m} \circ F_m,$$

где аргументы форм $g_{km}, F_{km} (1 \le k \le n)$ аннуляторны и $D = d_1(\varepsilon_1)\circ d_2(\varepsilon_2)\circ ... d_{nm}(\varepsilon_{nm})-$ некоторое диагональное слово. Поскольку здесь сомножители форм g_{km}, F_{km} центральны (ибо их аргументы принадлежат I), и сами эти формы являются центральными. Отсюда очевидным образом следует центральность и диагонального сомножителя D. При обычном истолковании D, как легко в этом убедиться, его позиции $<k,k>$ будут равны $a_{kk}=\sigma_1(\varepsilon_{(k-1)m+1},\ldots,\varepsilon_{km})+\sigma_2(\varepsilon_{(k-1)m+1},\ldots,\varepsilon_{km})+\ldots+\sigma_m(\varepsilon_{(k-1)m+1},\ldots,\varepsilon_{km}), 1\le k\le n.$

Поскольку здесь $D \in C$ и $I \subseteq J$, в сомножителе D необходимо выполнение следующих
условий: $a_{11}\circ a_{11}\equiv 0(\operatorname{mod} I), a_{11}=\sigma_1(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)+\sigma_2(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)+\ldots\sigma_m(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)$ и $a_{kk}=x_k+a_{11}=\sigma_1(x_k+\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m)+\sigma_2(x_k+\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots\varepsilon_m)+\cdots+\sigma_m(x_k+\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m)$ при некоторых $x_k \in I, k=2,\ldots,n.$ Проведенные выкладки показывают, что центр C порождается аннуляторнымиквазитрансвекциями $\mathrm{t}_{km,qm}(x_{kq}), x_{kq}\in I, <km,qm>\in A,$ и обобщенно-скалярнымиматрицами.

$$d_1(\varepsilon_1)\circ d_2(\varepsilon_2)\circ\ldots\circ d_m(\varepsilon_m)\circ d_{m+1}(x_k+\varepsilon_1)\circ d_{m+2}(\varepsilon_2)\circ\ldots\circ d_{2m}(\varepsilon_m)\circ\ldots\circ d_{(n-1)m+1}$$
$$(x_n+\varepsilon_1)\circ d_{(n-1)m+2}(\varepsilon_2)\circ\ldots\circ d_{nm}(\varepsilon_m),\ a_{11}\circ a_{11}, x_2,\ldots,x_n \in I.$$

Приведенные факты в объединении с главным результатом из [7] (где утверждается задаваемость группы $Sp^{\circ}(2n,R)$ в образующих (2) соотношениями $1-12$) и согласно указанному выше плану, тогда, приводят нас к следующему заключению.

Теорема 2. *Обобщенная проективная симплектическая группа $PSp^{\circ}(2n,R), n\ge 2,$ над коммутативным полулокальным кольцом $R,$ в образующих (2) представляется соотношениями 1−12 и еще следующими соотношениями:*

$$t_{km,qm}(x_{kq})=0, x_{kq}\in I, <km,qm>\in A; \quad (t_{km,qm}=0)$$
$$d_1(\varepsilon_1)\circ d_2(\varepsilon_2)\circ\ldots\circ d_m(\varepsilon_m)\circ d_{m+1}(x_2+\varepsilon_1)\circ d_{m+2}(\varepsilon_2)\circ\ldots\circ d_{2m}(\varepsilon_m)\circ\ldots\circ d_{(n-1)m+1}(x_n+\varepsilon_1)\circ d_{(n-1)m+2}$$
$$(\varepsilon_2)\circ\ldots\circ d_{nm}(\varepsilon_m)=0, (D=0)$$

В случаях колец R, для которых $I=\{0\}$ (так будет, например,при всяком R с 1), серия $(t_{km,qm}=0)$ просто-попросту исчезает, а соотношения же $(D=0)$ примут уже традиционный вид. Поэтому в этих случаях теорема 2 обретет следующую классическую форму.

Теорема 3. *Обобщенная проективная симплектическая группа $PSp\circ(2n,R), n\ge 2,$ над коммутативным полулокальным кольцом R с нулевым аннулятором $I=\{0\}$ в образующих (2) задается соотношениями 1−12 и еще «скалярными» соотношениями.*

$d_1(\varepsilon_1)\circ\ldots\circ d_m(\varepsilon_m)\circ\ldots d_{m+1}(\varepsilon_1)\circ\ldots\circ d_{2m}(\varepsilon_m)\circ\ldots\circ d_{(n-1)m+1}(\varepsilon_1)\circ\ldots\circ d_{nm}(\varepsilon_m)=0,$ где $a_{11}\circ a_{11}=0$ и $a_{11}=\sigma(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)+\sigma_2(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)+\ldots+\sigma_m(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m).$

Литература:

1. **Ши-цзянь Я.** Определяющие соотношения п-мерной модулярной группы / [Текст] Бейцзиншифаньдасаюэкэсюэлуньвень сюанцзи,1959,окт. С.48-70.
2. **Byssey W.H.** Generational relations for the abstract group simply isomorphic with the group $LF\left[2, p^n\right]$ / Proc. London Math.Soc. 3, 1905, P.296-315.
3. **Sundey J.G.** Presentations of the groups $SL(2,m)$ and $PSL(2,m)$ / Canad. J.Math, 24, 1972,N5,P.1129-1131.
4. **Behr H.,** presentation of the groups $PSL(2,P)$ / Mennicke J.A // Canad. J.Math,20,1968,N6,P.1432-1438.
5. **Сатаров Ж.С.** Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы. I / [Текст] Известия вузов. Матем.,2006.№10,59-67.
6. **Сатаров Ж.С.** Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы 11/ [Текст] Известия вузов.Матем.,2006,№11,33-41.
7. **Сатаров Ж.,** Определяющие соотношения обобщенной симплектическойгруппы над комутативнымполулокальнымкольцом [Текст] / К.И. Борубаева // Известия ОшТУ,2016,№1, С112-118.
8. **Борубаева К.И.** Образующие и соотношения обобщенной симплектической группы над коммутативным полулокальным кольцом/Магистерская диссертация г.Ош, 2016, 71с.