УДК: 371.3:513.3.

Момунова Нурайым Дуйшоналиевна, окутуучу,
Байышова Гулайым Жакышовна, п.и.к., доцент,
Ош гуманитардык педагогикалык институту

ОКУУЧУЛАРГА ТРИГОНОМЕТРИЯНЫН НЕГИЗГИ ФОРМУЛАЛАРЫН КОЛДОНУУУ МЕНЕН МАСЕЛЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУНУН ЫКМАЛАРЫ

Бул макалада, орто мектептерде геометрия сабагын окутууда окуучулардын билимдерин тереңдетүү максатында, тригонометриянын негизги формулалары аркылуу геометриялык маселелерди чыгаруунун ыкмалары каралган.

Ачкыч сөздөр: Тригонометриялык формулалар, маселелерди чыгаруу, пирамида, аянт, бийиктик, ромб, бурч, көлөм.

Момунова Нурайым Дуйшоналиевна, преподаватель,
Байышова Гулайым Жакышовна, п.и.к., доцент,
Ош гуманитардык педагогикалык институту

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

В этой статье рассматривается геометрические задачи с помощью тригонометрических формул для углубления знаний в средних школах по геометрии.

Ключевые слова: Тригонометрических формулы, решение задач, пирамида, площадь, высота, ромб, угол, объём.

Momunova Nurayym Duyshonalievna, teacher,
Baiyshova Gulayym Zhakyshovna, Ph.D., associate professor,
Osh Humanitarian Pedagogical Institute

METHODS OF SOLVING PROBLEMS OF TRIGONOMETRIC FORMULAS USED FOR STUDENTS

This article discusses geometric problems using trigonometric formulas to deepen knowledge in secondary schools in geometry.

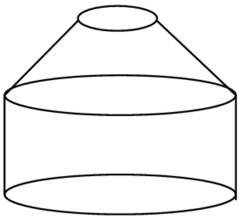
Key words: trigonometric formulas, problem solution, pyramid, area, height, rhombus, corner, upholster.

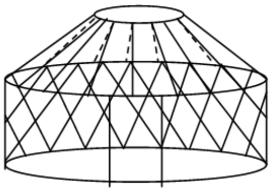
Жаш муундарга билим берүүдө ар бир илимдин өз орду бар, мына ушул илимдердин бири математика илиминин мааниси чоң экендигин белгилеп кетүү зарыл, анткени математика - «чыныгы дүйнөнүн мейкиндиктеги формаларын жана сандык катыштарын изилдөөчү илим болуп, адамзаттын практикалык керектөөлөрүнөн пайда болуп, азыркы мезгилде кыйла абстрактуу мүнөзгө ээ болуу менен көптөгөн башка илимдерге да кызмат кылууда. Математиканы окутууда төмөндөгүдөй максаттар аткарылат. Математиканын элементтерин кесиптик багытта окутуу, аны турмуштук керектөөгө колдоно билүү.

Азыркы кезде элибиздин элдик оозеки чыгармачылыгынан, кол өнөрчүлүгүнөн ж.б нерселерине математикага байланыштуу көп түшүнүктөрдү табууга болот. Мисалы, геометриялык фигуралар.

Кандайдыр бир чекиттердин көптүгү геометриялык фигура деп аталат. Ал эми кесинди, сызык, ийри сызык, шоола, түз сызык параллелограмм, квадрат, ромб, шар, куб, призма, конус ж.б геометриялык фигуралар болуп эсептелет. Биз мисал кылып «Манас» эпосундагы Атамер кыз-күйөөнүн жолуна кырк миң дилде чачтырды. Атайлап жасалган 41 өргө боз үйгө жала килем салдырды, мамыктан жаздык алдырып, атлас, тубар жууркан жайдырып, Каныкейди баш кылып 41 кызды өз-өз үйлөрүнө киргизди. [3]

Боз үйдүн ар бир бөлүгүнөн (кереге, уук, түндүк, туурдук, түндүк жабуу, ж.б.) жана боз үйдүн ичинде салынган шырдактагы жана төшөкчө орундуктардагы оймо-чиймелердин бардыгы геометриялык фигураларга мисал боло алат. Мисалы, биз окуучуларга боз үйдүн сырткы сүрөттөлүшү кесилген конус менен цилиндрдин биригүүсүн берет. (Боз үйдүн сүрөтүн же макетин көрсөтүү менен (1- чийме). Ал эми боз үйдүн ички көрүнүшү ромб, търт бурчтук ж.б. турат (2-чийме).





Боз үйдүн сырткы көрүнүшү (1-чийме)   Боз үйдүн ички көрүнүшү (2-чийме)

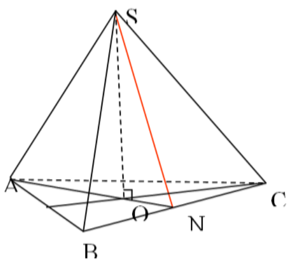
Мына ушулардын бардыгын оозеки түрдө мисал кылып айтып же көргөзүүгө болот. Бирок, аларды бирдей өлчөмдө кантип жайгаштыруу боюнча эсептеп чыгуу үчүн кандайдыр бир формула же эсептөөнүн жолдорун окуучуларга үйрөтүү керектиги башкы нерсе деп ойлойм.

Эми ошолорду жайгаштырууда тригонометриянын негизги формулаларын колдонууну туура көрдүм.

Тригонометрия- тригонометриялык функциялардын касиеттерин жана алардын геометриядагы колдонулуштарын үйрөтүүчү математиканын бөлүмү. Тригонометрия тегиздиктеги же түз сызыктуу жана сфералык болуп бөлүнөөрүн сиздер жакшы билесиздер. Ал эми тригонометриянын негизги
формулалары синустар менен косинустар теоремасында берилет. Мындан башка тангенстер теоремасы да көп колдонулат. Бул теореманы 15-кылымда И. Региомонтан чыгарган.

Тригонометриянын негизги формулаларын пайдалануу менен сабак өтүүнү ыңгайлуу деп эсептейм жана төмөндөгү эки маселени сунуш кылам.

1 – маселе. Туура үч бурчтуу пирамиданын негизинин жагы 8 см, ал эми чокусунан тегиздикке түшүрүлгөн бурч φ. Пирамиданын бийиктигин тапкыла? [1]



Үч бурчтуу пирамида (3-чийме)

Чыгаруу: ΔBCS : SC ны косинустар теоремасы боюнча таап алабыз.

$$BC^2 = BS^2 + CS^2 - 2BS \cdot CS \cdot cos\varphi$$

$64 = 2CS^2 - 2CS^2 \cdot cos\varphi \Rightarrow 64 = 2CS^2(1 - cos\varphi)$ мындан бурчту жарым бурч аркылуу туюнтуунун формуласын пайдалансак $(1 - cos\varphi) = 2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$ анда

$$64 = 2CS^2 \cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \Rightarrow 64 = 4CS^2\sin^2\frac{\varphi}{2} \Rightarrow CS^2 = \frac{64}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} \Rightarrow CS = \frac{4}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

2. ΔCSO дан пирамиданын бийиктиги болгон $SO = H$ аныктап алабыз.
$SO = H = \sqrt{SC^2 - OC^2}$. Мында ABC үч бурчтугун да OC - сырттан сызылган айлананын радиусу болуп калат. Синустар теоремасы боюнча $\dfrac{BC}{\sin 60^0} = 2OC$

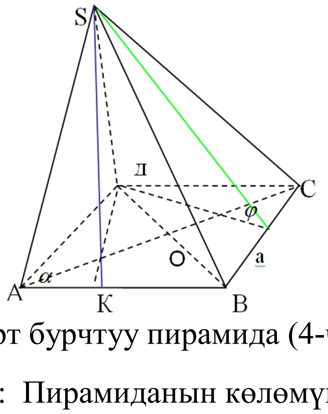
$$\frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2OC \Rightarrow 2OC = \frac{16}{\sqrt{3}} \Rightarrow OC = \frac{\frac{16}{\sqrt{3}}}{2} \Rightarrow OC = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

$$SO = H = \sqrt{\left(\frac{4}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)^2 - \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{64}{3}} = 4\cdot\sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{3 - 4\sin\frac{\varphi}{2}}{3\sin^2\frac{\varphi}{2}}} =$$

$$= 4\cdot\sqrt{\frac{3\cdot cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}{3\sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 4\cdot\sqrt{\frac{1}{tg^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{3}} = \frac{4\cdot\sqrt{1 - \frac{1}{3}\cdot tg^2\frac{\varphi}{2}}}{tg\frac{\varphi}{2}}.$$

$$SO = H = \frac{4\cdot\sqrt{1 - \frac{1}{3}\cdot tg^2\frac{\varphi}{2}}}{tg\frac{\varphi}{2}}$$ келип чыгат.

2 – маселе. Пирамиданын негизи - жагы a тар бурчу α барбар болгон ромб. Эки каптал граны негизине перпендикулярдуу жана калган эки каптал граны негизине φ бурчу менен жантайышкан. Пирамиданын көлөмүн тапкыла? [1]



Төрт бурчтуу пирамида (4-чийме)

Чыгаруу: Пирамиданын көлөмүн табуунун формуласы $V = \dfrac{1}{3}S_н H$ Пирамиданын негизинин аянтын табуу үчүн ромбдун диагоналдарынын узундуктарын табуу зарыл. Ал үчүн $АВД$ үч бурчтугунан косинустар теоремасы боюнча ВДны таап алабыз:

$$(ВД)^2 = (AB)^2 + (АД)^2 - 2(AB)(АД)cos\alpha, \quad (ВД)^2 = a^2 + a^2 - 2a^2cos\alpha,$$

$$(ВД)^2 = 2a^2 - 2a^2cos\alpha = 2a^2(1 - cos\alpha), \quad (ВД)^2 = 2a^2(1 - cos\alpha),$$

$$(\text{ВД})^2 = 4a^2\frac{1-cos\alpha}{2}, (ВД)^2 = 4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \text{ВД} = \sqrt{4\text{a}^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{ВД} = 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ушул сыяктуу эле ABC үч бурчтугунан AC ны табабыз:

$$(AC)^2 = 2a^2 - 2a^2cos(180^0 - \alpha), (AC)^2 = 2a^2 + 2a^2\cos\alpha = 2a^2(1+\cos\alpha),$$

$$(AC)^2 = 4a^2\frac{(1+\cos\alpha)}{2} = 4a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \qquad AC = \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2a\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$S_{\text{ромб}} = \frac{(AC)(ВД)}{2} = \frac{2a\frac{\alpha}{2}2a\sin\frac{\alpha}{2}}{2} = 2a^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = a^2\sin 2\frac{\alpha}{2} = a^2\sin\alpha,$$

$$\text{S}_{\text{АВСД}} = a^2\sin\alpha. \qquad (2)$$

Биз пирамиданын негизинин аянтын таап алдык. Эми пирамиданын бийиктигинин табууга киришели. $\angle BNД = \angle\text{CNД} = 90^0$. $BN = x$ болсун, анда $NC = \alpha - x$ болот.

$$\Delta BCД\,\text{нан:}\begin{cases}(ДN)^2 = (\text{ВД})^2 - x^2,\\ (ДN)^2 = a^2-(a-x)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(\text{ДN})^2 = (2a\sin\frac{\alpha}{2})^2 - x^2\\ (\text{ДN})^2 = 2ax - x^2\end{cases} \Rightarrow 4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} - x^2 = 2ax - x^2,$$

$4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2ax, x = \frac{4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2a} = 2a\sin^2\frac{\alpha}{2}$ чыгарылышка ээ болобуз, x тин маанисин жогорудагы системанын биринчи теңдемесине коюп ДN кесиндисинин узундугун табабыз.

$$(\text{ДN})^2 = (ВД)^2 - x^2 = (2a\sin\frac{\alpha}{2}) - (2a\sin^2\frac{\alpha}{2})^2 = 4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 4a^2\sin^4\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 4a^2 s\sin^2\frac{\alpha}{2}(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}) = 4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}, (\text{ДN})^2 = 4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

$$\text{ДN} = \sqrt{4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2a\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = a\sin\alpha, \quad \text{ДN} = a\sin\alpha.$$

Пирамиданын бийиктигин SДN үч бурчтугунан синустар теоремасы боюнча аныктайбыз:

$$\frac{\text{ДS}}{\sin\varphi} = \frac{\text{ДN}}{\sin(90^0 - \varphi)} \Leftrightarrow \frac{\text{ДS}}{\sin\varphi} = \frac{a\sin\alpha}{\cos\varphi} \Leftrightarrow \text{ДS} = a\sin\alpha\cdot\text{tg}\varphi, \quad \text{ДS} = a\sin\alpha\cdot\text{tg}\varphi. \qquad (3)$$

(2), (3) - туюнтмаларды (1) ге койсок пирамиданын көлөмүн тапкан болобуз:

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}a^2\sin\alpha\cdot a\sin\alpha tg\varphi = \frac{1}{3}a^3\sin^2\alpha\cdot tg\varphi, \quad V = \frac{1}{3}a^3\sin^2 a\cdot tg\varphi.$$

Кандай гана мазмундагы маселе болбосун, аны чыгаруу ишин арифметикалык жана тригонометриялык операцияларды аткарууга, келтирүүгө болорун, азыркы учурдагы илимдин өнүгүүсү жана заман талабына ылайыктуу эсептөө техникаларын кеңири колдонуу аркылуу гана ишке ашырып, окуучуларга кызыктуу маалыматтарды берүү менен алардын билим алууга оң мотивдеринин пайда болушуна жетише алабыз.

Тригонометриялык жол менен маселелерди чыгаруу окуучулардын логикалык ой-жүгүртүүсүн өстүрүп, алган билимдерин практикада колдонууга көмөк берет.

Андыктан, билим реалдуу дүйнөнүн кубулуштарын, алардын касиетин, байланыш катнаштарын, өсүү мыйзам ченемдүүлүктөрүн чагылдырса, «Ар бир билимде канча математика болсо, ошончо чындык бар»- деп өз оюн кеңири айтып өтөт белгилүү ойчул И. Кант.

Мына ошондуктан, ар кандай мисал-маселелерди чыгарууда окуучулардын логикалык ойлонуусу, математиканы жакшы өздөштүрүүсүнө түрткү берет. Ал үчүн эң алгач башталгыч класстарды окутууда математика боюнча фундамент жакшы курулушу керек деп ойлоймун.

Адабияттар:

1. Погорелов. А. В. Геометрия 7-11. Бишкек: Мектеп, 1993г.
2. Сканави М.И. «Сборник конкурсных по математике для поступающих во ВТУЗы», - М.: высшая школа,1983.
3. Математика: Терминдердин түшүндүрмө сөздүгү. Фрунзе, 1989.
4. «Манас» эпосу элдик тарбиянын кенчи. Т. Максутов, М. Байымбетов. Б.,1999.- 166 б.
5. «Мектеп-школа» билим берүү боюнча илимий практикалык журналы 2001.№3, 39-44