УДК 514.75

Ишматова Мафтунахон Арслонбековна, Мамат кызы Айчурок,
Самаган кызы Жаркынай - магистранттар,
Ош мамлекеттик университети

E_4 МЕЙКИНДИГИНДЕГИ ЭКИ ЧЕНЕМДҮҮ БЕТТЕРДИ ЧАГЫЛТУУДА БЕРИЛГЕН ТОРЧОНУН ЭЛЕСИНИН ГЕОДЕЗИЯЛЫК ТОРЧО БОЛУШУНУН ЗАРЫЛ ЖАНА ЖЕТИШТҮҮ ШАРТТАРЫ

Евклиддик E_4 мейкиндигинде эки ченемдүү беттерди $f : V \to V'$ чагылтуусу каралган. V бетинде берилген Σ_2 торчосунун чагылтуусундагы элеси геодезиялык торчо болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары далилденген.

Ачкыч сөздөр: Евклиддик мейкиндик, чагылтуу, геодезиялык сызык, геодезиялык торчо, торчонун чагылтуудагы элеси

Ишматова Мафтунахон Арслонбековна, Мамат кызы Айчурок,
Самаган кызы Жаркынай - магистранты,
Ошский государственный университет

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ОБРАЗА ДАННОЙ СЕТИ В ОТОБРАЖЕНИИ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ E_4

В Евклидовом пространстве E_4 рассмотрено отображение $f : V \to V'$ двумерных поверхностей. Доказаны неоходимое и достаточное условия геодезичности образа сети Σ_2 на поверхности в отображении f .

Ключевые слова: евклидово пространство, отображение, геодезическая линия, геодезическая сеть, образ сети в отображении.

Ishmatova Maftunakhon Arslonbekovna, Mamat Kyzy Aychurok,
Samagan kyzy Zharkynay - graduate students,
Osh State University

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS OF GEODOSICITY OF THE IMAGE OF THE GIVEN NET IN THE MAPPING OF TWO DIMENSIONAL SURFACES IN THE SPACE E_4

It is considered 2- dimensional surfaces V , V' in a space E_4 and defined a mapping $f : V \to V'$. In the case when the surface is minimal it is proved a theorem: in order that the net Σ_2 on the surface V is conjugate necessary and sufficient conditions of geodosicity of the image of the given net in the mapping of two dimensional surfaces in the space E_4.

Key words: Euclidean space, mapping, geodesic line, geodesic net, image of a net in a mapping

Евклиддик E_4 мейкиндигинде $\Re = \{O, \overrightarrow{\tau_i}, \overrightarrow{\tau_\alpha}\} \left(i, j, k = 1,2; \alpha, \beta, \gamma = 3,4\right)$ ортонормаланган реперин тандап алабыз. Эки ченемдүү V бетинин теңдемеси төмөнкү көрүнүштө болот:

$$\overrightarrow{X} = x^a\left(u^1, u^2\right)\overrightarrow{\tau_a} \quad \left(a, b, c = 1,2,3,4\right).$$

$x^a\left(u^1, u^2\right)$ функциялары дифференцирленүүчү, (үчүнчү тартипке чейин) деп эсептейбиз.

V бетине $\Re = \left(X, \overrightarrow{e_a}\right)$ реперин бириктиребиз, $X \in V,\ \overrightarrow{e_i} \in T_2(X),\ T_2(X)$ – эки ченемдүү V бетинин X чекитиндеги жаныма тегиздиги, $\overrightarrow{e_\alpha} \in N_2(X)$ – $T_2(X)$ – тегиздигине ортогоналдык толуктоочу тегиздик.

Ушундайча тандалып алынган репердин деривациондук (б.а. кыймылын мүнөздөөчү) теңдемелери төмөндөгүдөй болот:

$$d\overrightarrow{X} = \omega^i \overrightarrow{e_i}\ ,\ \ d\overrightarrow{e_i} = \omega_i^j \overrightarrow{e_j} + \omega_i^\alpha \overrightarrow{e_\alpha},\ \ d\overrightarrow{e_\alpha} = \omega_\alpha^i \overrightarrow{e_i} + \omega_\alpha^\beta \overrightarrow{e_\beta} \qquad (1)$$

Бул реперге карата V бетинин теңдемеси $\omega^\alpha = 0$ көрүнүшүндө болот. Бул теңдеиени “сырттан” дифференцирлеп, Картандын леммасын [1] колдонсок, төмөнкү келип чыгат:

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j\ , \quad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha\ . \qquad (2)$$

b_{ij}^α функциялары (ар бир бекемделген α үчүн) эки жолу коварианттык, симметриялуу тензорду түзүшөт.

b_{ij}^3, b_{ij}^4 V бетинин негизги тензору экендиги белгилүү.

$\overrightarrow{e_i}\ \overrightarrow{e_j} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} – Кронекердин символу) теңдештигинин дифференцирлеп, төмөндөгүнү алабыз:

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0. \qquad (3)$$

Ушуга эле окшош, $\overrightarrow{e_i}\ \overrightarrow{e_\alpha} = 0$ теңдештигин дифференцирлеп, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\omega_i^\alpha + \omega_\alpha^i = 0. \qquad (4)$$

V бетиндеги кандайдыр бир аймакта ортогоналдык Σ_2 торчосу берилген болсун. $\Re$ реперинин $\overrightarrow{e_i}$ векторлорун ушул торчонун сызыктарынын X чекитиндеги жанымаларына “жайлаштырабыз”. Анда $\omega_i^j\ \left(i \neq j\right)$ формалары башкы формалар [2] болушат, б.а

$$\omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k\ , \qquad (5)$$

мында– торчонун инварианттары.

V' – евклиддик E_4 мейкиндигиндеги башка бир эки ченемдүү бет болсун. $f: V \to V'$ чагылтуусун карайбыз. V' тегиздигине $\Re' = \left(Y, \overrightarrow{a_i}\ \overrightarrow{a_\alpha}\right)$ кыймылдуу реперин бириктиребиз, мында реперинин деривациондук формулалары төмөндөгүдөй болот:

$$d\overrightarrow{Y} = \overline{\omega}^{j}\overrightarrow{a_j}\,, \qquad (7)$$

$$d\overrightarrow{a_i} = \overline{\omega}_i^{j}\overrightarrow{a_j} + \omega_i^{\alpha}\overrightarrow{a_\alpha}\,, \qquad (8)$$

$$d\overrightarrow{a_\beta} = \overline{\omega}_\beta^{j}\overrightarrow{a_j} + \omega_\beta^{\alpha}\overrightarrow{a_\alpha}\,, \qquad (9)$$

мында $\overrightarrow{a_\alpha} = \overrightarrow{e_\alpha}$. Биз $\mathfrak{R}$ жана $\mathfrak{R}'$ реперлерин

$$\omega^{i} = \overline{\omega}^{i} \qquad (10)$$

боло тургандай тандап алдык.

V' бетинин теңдемелери $\mathfrak{R}'$ реперине карата $\overline{\omega}^{\alpha} = 0$ көрүнүшүндө болот. Бул барабардыкка сырткы дифференцирлөө амалын колдонуп, Картандын леммасы боюнча төмөндөгүнү алабыз.

$$\overline{\omega}_i^{\alpha} = \overline{b}_{ij}^{\alpha}\omega^{j}\ , \quad \overline{b}_{ij}^{\alpha} = \overline{b}_{ji}^{\alpha} \qquad (11)$$

мында $\overline{b}_{ij}^{\alpha}$ – V' бетинин негизги тензорлору.

$\omega_i^{j}, \omega_i^{\alpha}, \omega_\alpha^{\beta}$ жана $\overline{\omega}_i^{j}, \overline{\omega}_i^{\alpha}, \overline{\omega}_\alpha^{\beta}$ формаларынын ортосундагы байланыш төмөндөгүдөй экендиги белгилүүү [3]:

$$\overline{\omega}_i^{\ell} = \tilde{p}_j^{\ell}\left(dp_i^{j} + p_i^{k}\omega_k^{j} + p_i^{\alpha}\omega_\alpha^{j}\right) \qquad (12)$$

$$\overline{\omega}_i^{\alpha} = \left(dp_i^{\alpha} + p_i^{k}\omega_k^{\alpha} + p_i^{\beta}\omega_\beta^{\alpha}\right) - p_\ell^{\alpha}\tilde{p}_j^{\ell}\left(dp_i^{j} + p_i^{k}\omega_k^{j} + p_i^{\beta}\omega_\beta^{j}\right) \qquad (13)$$

$$\overline{\omega}_i^{\beta} = \omega_\alpha^{\beta} - p_j^{\beta}\tilde{p}_k^{j}\omega_\alpha^{k} \qquad (14)$$

[4] макалада төмөндөгүдөй теорема далилденген :

а) $f(\Sigma_2) \subset V'$ торчосунун $f(\omega^1)$ сызыгы геодезиялык сызык болушу үчүн

$$\tilde{p}_j^{\ell}\left(p_{11}^{j} + p_1^{k}a_{k1}^{j} + p_1^{\alpha}a_{\alpha 1}^{j}\right) = 0 \qquad (15)$$

шартынын орун алышы зарыл жана жетиштүү.

Бул барабардыктын геометриялык мааниси төмөндөгүдөй болот: $\overline{\omega}_i^{\ell} = \tilde{p}_j^{\ell}\left(dp_i^{j} + p_i^{k}\omega_k^{j} + p_i^{\alpha}\omega_\alpha^{j}\right)$ етинде берилген Σ_2 торчосу бул бетте жаныма тегиздиктердин $\Delta_2 = T_2(X) = \Delta\left(X, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ эки ченемдүү бөлүштүрүүсүн аныктайт жана Δ_2 бөлүштүрүүсүнө ортогоналдык толуктоочу $\overline{\Delta}_2 = N_2(X) = \Delta\left(X, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\right)$ бөлүштүрүүсү жашайт. $\overline{\Delta}_2$ бөлүштүрүүсүндө Σ_2' ортогоналдык торчосу бар деп эсептейли. $\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}$ векторлорун Σ_2' торчосунун сызыктарынын жанымаларына жайгаштыралы. Анда ω_α^{γ} формалары дагы башкы формалар болушат, б.а.

$\omega_\alpha^\gamma = a_{\alpha i}^\gamma \omega^i$. Σ_2' торчосунун ω^α сызыктарынын $\left(X, \overrightarrow{e_\alpha}\right)$ жанымаларындагы F_α^i псевдофоекстары [4] төмөндөгүдөй радиус – векторлор менен аныкталышат:

$\overrightarrow{F}^i_\alpha = \overrightarrow{X} - \dfrac{1}{a_{\alpha i}^i}\overrightarrow{e_\alpha}$, мында $a_{\alpha i}^\gamma = -a_{ii}^\alpha = -b_{ii}^\alpha$. V бетинде " бириктирилген" ийринин теңдемеси төмөдөгүдөй экендиги белгилүү [5] :

$$\left(b_{11}^3 b_{22}^3 - b_{12}^3 b_{21}^3\right)\left(x^3\right)^2 + \ldots \qquad (15)$$

Бул экинчи тартиптеги ийри $N_2(X)$ тегиздигинде жатат.

V бетинин орточо ийрилик вектору тэкендиги белгилүү:

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}\left[\left(b_{11}^3 + b_{22}^3\right)\overrightarrow{e_3} + \left(b_{11}^4 + b_{22}^4\right)\overrightarrow{e_4}\right] \qquad (16)$$

V бети минималдык бет болсун дейли, анда $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{0}$, б.а.

$$b_{11}^3 + b_{22}^3 = 0, \quad b_{11}^4 + b_{22}^4 = 0. \qquad (17)$$

$\overrightarrow{a_{11}} \perp \overrightarrow{s_1}, \ \overrightarrow{a_{11}} \perp \overrightarrow{s_2}$,

мында $\overrightarrow{a_{11}} = d_1 \overrightarrow{a_1}, \ \overrightarrow{s_1} = \sum\limits_j \tilde{p}_j^1 \overrightarrow{e_j}, \quad \overrightarrow{s_1} = \sum\limits_j \tilde{p}_j^2 \overrightarrow{e_j}$.

б) $f(\Sigma_2)$ торчосунун $f\left(\omega^2\right)$ сызыгы V' бетинде геодезиялык сызык болушу үчүн төмөндөгү шарттын орун алышы зарыл жана жетиштүү:

$$\tilde{p}_j^\ell\left(p_{22}^j + p_2^k a_{k2}^j + p_2^\alpha a_{\alpha 2}^j\right) = 0 \qquad (16)$$

Бул барабардыктын геометриялык мааниси төмөндөгүдөй болот:

$\overrightarrow{a_{22}} \perp \overrightarrow{s_1}, \ \overrightarrow{a_{22}} \perp \overrightarrow{s_2}$, мында $\overrightarrow{a_{22}} = d_2 \overrightarrow{a_2}$. $\quad \overrightarrow{s_1} = \sum\limits_j \tilde{p}_j^2 \overrightarrow{e_j}$.

Биз $f(\Sigma_2)$ торчосу V' бетинде геодезиялык торчо болсун деп шарт коелу. Анда (15), (16) шарттары бир учурда орун алыштары керек б.а. $\overrightarrow{s_i} \perp \overrightarrow{a_{11}}, \ \overrightarrow{s_i} \perp \overrightarrow{a_{22}}$.

Тескерисинче, (15),(16) шарттары бир учурда орун алса, анда V' бетиндеги $f(\Sigma_2)$ торчосу геодезиялык торчо болот. Ошентип, төмөндөгүдөй теорема далилденди.

Теорема. $\Sigma_2 \subset V$ торчосунун $f: V \to V'$ чагылтуусундагы элеси $f(\Sigma_2) \subset V'$ геодезиялык торчо болушу үчүн

$\overrightarrow{s_1}\overrightarrow{a_{ii}} = 0, \ \overrightarrow{s_2}\overrightarrow{a_{ii}} = 0 \ (i = 1,2)$ шарттарынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

Адабияттар:

1. **Фиников С.П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С.П. Фиников // М-Л.: Госттехиздат,.1948.- 432.
2. **Базылев В.Т.** О многомерных сетях в евклидовом пространстве [Текст] // Литовский математический сборник, 1966.VI. - №4. – С. 475-491.
3. **Базылев В.Т.** Сети на многообразиях //Труды геометрического семинара. [Текст] – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1974. – Т.6. – С. 189-205.

4. **Борбоева Г.** Необходимое и достаточное условие геодезичности линий образа данной сети в отображении гиперповерхностей евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева // Вестник ОшГУ: Серия пед.-психолог. наук.-2008. №1.-С.149-152.
5. **Матиева Г.** Об одном частичном отображении пространства E_3 // Проблемы математики и информатики в XXI веке: труды международной научной конференции. [Текст] / Г. Борбоева // Бишкек: КГНУ, 2000.–368 С./ Вестник Кыргызского государственного Национального университета: Сер.3. Естественно-технические науки. – 2000. -№4. –С. 52-56.