УДК 514.75

Ишматова Мафтунахон Арслонбековна, Мамат кызы Айчурок,
Мадрахимова Айтилла Кадыровна - магистранты,
Ош мамлекеттик университети

E_4 МЕЙКИНДИГИНДЕ БӨЛҮКТӨП ЭКИ ЧЕНЕМДҮҮ БЕТТЕРДИ ЧАГЫЛТУУНУН БИР КАСИЕТИ ЖӨНҮНДӨ

Евклиддик E_4 *мейкиндигинде эки ченемдүү* V *жана* V' *беттери каралган.* $f: V \to V'$ *дифференцирленүүчү чагылтуусу аныкталган.* V *бети минималдык бет болгон учурда төмөндөгүдөй теорема далилденген:* V *минималдык бетинде жаткан* Σ_2 *торчосу түйүндөш торчо болушу үчүн берилген* V *бетине "бириктирилген" экинчи тартиптеги сызык тиешелеш түрдө* F_3^1, F_4^1 *жана* F_3^1, F_4^1 *псевдофокустары аркылуу өтүүчү түгөй параллель түз сызыктарга ажыралышы зарыл жана жетиштүү.*

Ачкыч сөздөр: евклиддик мейкиндик, минималдык бет, чагылтуу, псевдофокус, бетке "бириктирилген" ийри сызык" .

Ишматова Мафтунахон Арслонбековна, Мамат кызы Айчурок,
Мадрахимова Айтилла Кадыровна - магистранты,
Ошский государственный университет

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ В ЧАСТИЧНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ДВУХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА E_4

В Евклидовом пространстве E_4 *рассмотрены двумерные поверхности* V, V'*. Определено дифференцируемое отображение* $f: V \to V'$*. В случае, когда поверхность* V *минимальная, доказана теорема: для того чтобы сеть* Σ_2 *на поверхности* V *являлась сопряженнолй необходимо и достаточно, чтобы "присоединенная" кривая второго порядка поверхности* V *распадалась на пару параллельных прямых, проходящих через псевдофокусы* F_3^1, F_4^1 *и* F_3^2, F_4^2*, соотвественно.*

Ключевые слова: Евклидово пространство, минимальная поверхность, отображение, псевдофокус, присоединенная кривая поверхности.

Ishmatova Maftunahon Arslonbekovna, Mamat Kyzy Aichurok,
Madrahimova Aytilla Kadyrovna – graduate students,
Osh State University

ABOUT PROPERTY OF A MAPPING OF TWO DIMENSIONAL SURFACES IN A SPACE E_4

It is considered 2- dimensional surfaces V, V' *in a space* E_4 *and defined a mapping* $f: V \to V'$. *In the case when the surface is minimal it is proved a theorem: in order that the net* Σ_2 *on the surface* V *is conjugate necessary and sufficient that the joint curve of second order of the surface* V *will fall apart to pair of parallel lines, passing through the points* F_3^1, F_4^1 *and* F_3^2, F_4^2.

Key words: Euclidean space, minimal surface, mapping, pseudofocus, a curve, jointed to a surface.

Евклиддик E_4 мейкиндигинде $\Re = \{O, \overrightarrow{\tau_i}, \overrightarrow{\tau_\alpha}\}\ (i, j, k = 1,2; \alpha, \beta, \gamma = 3,4)$ ортонормаланган реперин тандап алабыз . Эки ченемдүү V бетинин теңдемеси төмөнкү көрүнүштө болот:

$$\overrightarrow{X} = x^a(u^1, u^2)\overrightarrow{\tau_a} \quad (a, b, c = 1,2,3,4).$$

$x^a(u^1, u^2)$ функциялары дифференцирленүүчү, (үчүнчү тартипке чейин) деп эсептейбиз.

V бетине $\Re = (X, \overrightarrow{e_a})$ реперин бириктиребиз, $X \in V$, $\overrightarrow{e_i} \in T_2(X)$, $T_2(X)$ – эки ченемдүү V бетинин X чекитиндеги жаныма тегиздиги, $\overrightarrow{e_\alpha} \in N_2(X)$ – $T_2(X)$ – тегиздигине ортогоналдык толуктоочу тегиздик.

Ушундайча тандалып алынган репердин деривациондук (б.а. кыймылын мүнөздөөчү) теңдемелери төмөндөгүдөй болот:

$$d\overrightarrow{X} = \omega^i \overrightarrow{e_i}, \quad d\overrightarrow{e_i} = \omega_i^j \overrightarrow{e_j} + \omega_i^\alpha \overrightarrow{e_\alpha}, \quad d\overrightarrow{e_\alpha} = \omega_\alpha^i \overrightarrow{e_i} + \omega_\alpha^\beta \overrightarrow{e_\beta} \tag{1}$$

Бул реперге карата V бетинин теңдемеси $\omega^\alpha = 0$ көрүнүшүндө болот. Бул теңдеиени “сырттан” дифференцирлеп, Картандын леммасын [1] колдонсок, төмөнкү келип чыгат:

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \qquad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha. \tag{2}$$

b_{ij}^α функциялары (ар бир бекемделген α үчүн) эки жолу коварианттык, симметриялуу тензорду түзүшөт.

b_{ij}^3, b_{ij}^4 V бетинин негизги тензору экендиги белгилүү.

$\overrightarrow{e_i}\ \overrightarrow{e_j} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} – Кронекердин символу) теңдештигинин дифференцирлеп, төмөндөгүнү алабыз:

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{3}$$

Ушуга эле окшош, $\overrightarrow{e_i}\ \overrightarrow{e_\alpha} = 0$ теңдештигин дифференцирлеп, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\omega_i^\alpha + \omega_\alpha^i = 0. \tag{4}$$

V бетиндеги кандайдыр бир аймакта ортогоналдык Σ_2 торчосу берилген болсун. $\Re$ реперинин $\overrightarrow{e_i}$ векторлорун ушул торчонун сызыктарынын X чекитиндеги жанымаларына “жайлаштырабыз”. Анда $\omega_i^j\ (i \neq j)$формалары башкы формалар [2] болушат, б.а

$$\omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k, \tag{5}$$

мында a_{ik}^j – торчонун инварианттары.

V' – евклиддик E_4 мейкиндигиндеги башка бир эки ченемдүү бет болсун. $g: V \to V'$ чагылтуусун карайбыз. V' тегиздигине $\Re' = \left(У, \overrightarrow{a_i}\, \overrightarrow{a_\alpha}\right)$кыймылдуу реперин бириктиребиз, мында $У \in V', g(X) = У, У = V' \cap \left(X, \overrightarrow{e_3}\right)$,

$$\overrightarrow{a_i} = p_i^k \overrightarrow{e_k} + p_i^\alpha \overrightarrow{e_\alpha}, \quad \overrightarrow{a_\beta} = \overrightarrow{e_\beta}. \tag{6}$$

$\Re'$ реперинин деривациондук формулалары төмөндөгүдөй болот:

$$d\overrightarrow{y} = \overline{\omega}^j \overrightarrow{a_j}, \tag{7}$$

$$d\overrightarrow{a_i} = \overline{\omega}_i^j \overrightarrow{a_j} + \omega_i^\alpha \overrightarrow{a_\alpha}, \tag{8}$$

$$d\overrightarrow{a_\beta} = \overline{\omega}_\beta^j \overrightarrow{a_j} + \omega_\beta^\alpha \overrightarrow{a_\alpha}, \tag{9}$$

мында $\overrightarrow{a_\alpha} = \overrightarrow{e_\alpha}$. Биз $\Re$ жана $\Re'$ реперлерин

$$\omega^i = \overline{\omega}^i \tag{10}$$

боло тургандай тандап алдык.

V' бетинин теңдемелери $\Re'$ реперине карата $\overline{\omega}^\alpha = 0$ көрүнүшүндө болот. Бул барабардыкка сырткы дифференцирлөө амалын колдонуп, Картандын леммасы боюнча төмөндөгүнү алабыз.

$$\overline{\omega}_i^\alpha = \overline{b}_{ij}^\alpha \omega^j, \quad \overline{b}_{ij}^\alpha = \overline{b}_{ji}^\alpha \tag{11}$$

мында $\overline{b}_{ij}^\alpha$ – V' бетинин негизги тензорлору.

$\omega_i^\gamma, \omega_i^\alpha, \omega_\alpha^\beta$ жана $\overline{\omega}_i^j, \overline{\omega}_i^\alpha, \overline{\omega}_\alpha^\beta$ формаларынын ортосундагы байланыш төмөндөгүдөй экендиги белгилүүү [3]:

$$\overline{\omega}_i^\ell = \tilde{p}_j^\ell \left(dp_i^j + p_i^k \omega_k^j + p_i^\alpha \omega_\alpha^j\right) \tag{12}$$

$$\overline{\omega}_i^\alpha = \left(dp_i^\alpha + p_i^k \omega_k^\alpha + p_i^\beta \omega_\beta^\alpha\right) - p_\ell^\alpha \tilde{p}_j^\ell \left(dp_i^j + p_i^k \omega_k^j + p_i^\beta \omega_\beta^j\right) \tag{13}$$

$$\overline{\omega}_i^\beta = \omega_\alpha^\beta - p_j^\beta \tilde{p}_k^j \omega_\alpha^k \tag{14}$$

V бетинде берилген Σ_2 торчосу бул бетте жаныма тегиздиктердин

$\Delta_2 = T_2(X) = \Delta(X, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ эки ченемдүү бөлүштүрүүсүн аныктайт жана Δ_2 бөлүштүрүүсүнө ортогоналдык толуктоочу $\overline{\Delta}_2 = N_2(X) = \Delta(X, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ бөлүштүрүүсү жашайт. $\overline{\Delta}_2$ бөлүштүрүүсүндө Σ_2' ортогоналдык торчосу бар деп эсептейли. $\vec{e_3}, \vec{e_4}$ векторлорун Σ_2' торчосунун сызыктарынын жанымаларына жайгаштыралы. Анда ω_α^γ формалары дагы башкы формалар болушат, б.а.

$\omega_\alpha^\gamma = a_{\alpha i}^\gamma \omega^i$. Σ_2' торчосунун ω^α сызыктарынын $(X, \vec{e_\alpha})$ жанымаларындагы F_α^i псевдофоекстары [4] төмөндөгүдөй радиус – векторлор менен аныкталышат:

$$\vec{F}_\alpha^i = \vec{X} - \frac{1}{a_{\alpha i}^i}\vec{e_\alpha}, \text{ мында } a_{\alpha i}^\gamma = -a_{ii}^\alpha = -b_{ii}^\alpha .$$

V бетинде “бириктирилген” ийринин теңдемеси төмөдөгүдөй экендиги белгилүү [5] :

$$\left(b_{11}^3 b_{22}^3 - b_{12}^3 b_{21}^3\right)\left(x^3\right)^2 + \ldots \qquad (15)$$

Бул экинчи тартиптеги ийри $N_2(X)$ тегиздигинде жатат.

V бетинин орточо ийрилик вектору төмөндөгүдөй экендиги белгилүү:

$$\vec{M} = \frac{1}{2}\left[\left(b_{11}^3 + b_{22}^3\right)\vec{e_3} + \left(b_{11}^4 + b_{22}^4\right)\vec{e_4}\right] \qquad (16)$$

V бети минималдык бет болсун дейли, анда $\vec{M} = \vec{0}$, б.а.

$$b_{11}^3 + b_{22}^3 = 0, \quad b_{11}^4 + b_{22}^4 = 0. \qquad (17)$$

$\Sigma_2 \subset V$ торчосу түйүндөш торчо деп алалы. Анда $\vec{b_{ij}} = \vec{0}$ (бардык ушундай векторлор үчүн) болот. Мындан төмөндөгү келип чыгат:

$$b_{12}^3 = b_{21}^3 = 0, \quad b_{12}^4 = b_{21}^4 = 0. \qquad (18)$$

Эгерде V бети минималдык болсо жана $\Sigma_2 \subset V$ торчосу түйүндөш торчо болсо, анда (17), (18) шарттары бир учурда орун алышат.

Анда (15) теңдеме төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$\left(b_{11}^3\right)^2\left(x^3\right)^2 + 2b_{11}^4 b_{11}^3 x^3 x^4 + \left(b_{11}^4\right)^2\left(x^4\right)^2 = 1$$

же

$$\left(b_{11}^3 x^3 + b_{11}^4 x^4\right)^2 = 1 \qquad (19)$$

(19) барабардык $N_2(X)$ тегиздигинде ℓ_1, ℓ_2 паралель түгөй түз сызыктарды аныктайт. Алардын теңдемелери төмөндөгүдөй болот:

$$b_{11}^3 x^3 + b_{11}^4 x^4 = 1, \quad b_{11}^3 x^3 + b_{11}^4 x^4 = -1.$$

Мындан ℓ_1 түз сызыгы F_3^1, F_4^1 чекиттери аркылуу өтө тургандыгын, ал эми ℓ_2 түз сызыгы F_3^2, F_4^2 чекиттери аркылуу өтө тургандыгын көрөбүз .

Тескерисинче, V бетине бириктирилген (15) ийри F_3^1, F_4^1 жана F_3^2, F_4^2 чекиттери аркылуу өтүшкөн, түгөй параллель түз сызыктар болушсун деп эсептейли. (17) шартын эске алсак, анда (15) теңдеме төмөндөгү көрүнүшкө келет:

$$\left[\left(b_{11}^3\right)^2 + b_{12}^3 b_{2\ell}^3\right]\left(x^3\right)^2 + \left[\left(b_{22}^4\right)^2 + b_{12}^4 b_{2\ell}^4\right]\left(x^4\right)^2 +$$
$$+\left(2b_{11}^4 b_{11}^3 + b_{12}^3 b_{1\ell}^4 + b_{21}^3 b_{12}^3\right)x^3\, x^4 = 1.$$

Бул барабардыкты (19) барабардык менен салыштырса, анда төмөндөгү келип чыгат:

$$b_{12}^3 b_{2\ell}^3 = 0,\ \ b_{12}^4 b_{2\ell}^4 = 0,\ b_{12}^3 b_{21}^4 + b_{2\ell}^3 b_{12}^4 = 0.$$

Мындан $\Sigma_2 \subset V$ торчосунун түйүндөш торчо экендигин көрөбүз. Демек, төмөндөгүдөй теорема далилденди.

Теорема. Минималдык V бетиндеги ортогоналдык Σ_2 торчосу түйүндөш торчо болушу үчүн V бетине бириктирилген ийри F_3^1, F_4^1 жана F_3^2, F_4^2 чекиттери аркылуу өтүшө турган түгөй параллель түз сызыктарга ажыралышы зарыл жана жетиштүү.

Адабияттар:

1. **Фиников С.П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С.П. Фиников // М-Л.: Госттехиздат,.1948.- 432.
2. **Базылев В.Т.** О многомерных сетях в евклидовом пространстве //Литовский математический сборник, 1966.VI. - №4. – С. 475-491.
3. **Матиева Г.** Об одном частичном отображении пространства E_3//Проблемы математики и информатики в XXI веке: труды международной научной конференции. [Текст] Борбоева Г. – Бишкек: КГНУ, 2000.–368 С./ Вестник Кыргызского государственного Национального университета: Сер.3. Естественно-технические науки. – 2000. -№4. –С. 52-56.
4. **Базылев В.Т**. Сети на многообразиях //Труды геометрического семинара. [Текст] – Москва: АН СССР, ВИНИТИ, 1974. – Т.6. – С. 189-205.
5. **Борбоева Г.** Необходимое и достаточное условие геодезичности линий образа данной сети в отображении гиперповерхностей евклидова пространства [Текст] Матиева Г. // Вестник ОшГУ: Серия пед.-психолог. наук.-2008. №1.-С.149-152.