УДК 517.968

Мамбетов Жоомарт Иманалиевич – к.ф.-м.н,
Маатов Кенешбек Максатович – ст. преподаватель,
Ошский технологический университет

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА ЯЗЫКЕ PASCAL

В статье реализована компьютерная программа для решения систем уравнений.

Ключевые слова: система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, метод дополнительного аргумента, метод последовательных приближений.

Мамбетов Жоомарт Иманалиевич – ф.- м. и. к,
Маатов Кенешбек Максатович – ага окуктуучу,
Ош технологиялык университети

СЫЗЫКТУУ ЭМЕС, ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫН PASCAL ТИЛИНДЕ ЧЫГАРУУ

Теңдемелер системасын чыгаруу үчүн компьютердик программа түзүлгөн.

Ачкыч сөздөр: сызыктуу эмес, жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин системасы, кошумча аргумент кийирүү усулу, удаалаш жакындаштыруу усулу.

Mambetov Zhoomart Imanalievich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Maatov Keneshbek maksatovich – senior lecture,
Osh technological university

SOLVING OF SYSTEM OF NON-LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PASCAL

A computer program to solve systems of equations is implemented.

Key words: system of non-linear partial differential equations, method of additional argument, method of successive approximations.

Введение. Впервые компьютерная реализация метода дополнительного аргумента была осуществлена в [1].

В [1] отмечено, что переменная x в этих уравнениях выступает только как параметр, поэтому она не включается в расчетные формулы для соответствующих сеточных функций $P(j,i) = p(jh,ih,x),\ V(j,i) = v(jh,ih,x),$ где h - шаг по t; интегралы аппроксимировались по формуле трапеций. Расчеты для полученной системы разностных уравнений показали степенную сходимость последовательных приближений для не очень больших значений t.

В дальнейшем по этой методике в [2] для уравнения

$$u_{tt}(t,x) = t^2u^2(t,x)u_{xx}(t,x) - u(t,x)u_x(t,x) -$$

$$= tu_x(t,x)(u_t(t,x) - tu(t,x)u_x(t,x)) + f(t), \quad (t,x) \in G_2(T)$$

с начальными условиями $u(0,x) = x,\ u_t(0,x) = 0$,

для которой метод дополнительного аргумента (МДА) дает эквивалентное интегральных уравнений (ИУ)

$$v(s,t,x)=x-\int_s^t \tau\cdot v(\tau,t,x)d\tau+\int_0^s (s-\nu)f(\nu)d\nu,$$

была написана программа и проведены соответствующие расчеты, подтвердившие эффективность метода.

В [3] на основе МДА реализовано численное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right]-\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+\int_0^x K(t)u(t,\xi)d\xi.$$

Из этого обзора следует, что ранее не применялся МДА для приближенного решения систем уравнений. Рассмотрим конкретный пример.

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x}=u_2(t,x)-x+1,\\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x}=1+t,\end{cases}\tag{1}$$

с начальными условиями

$$u_1(0,x)=1,\quad u_2(0,x)=x,\ x\in R.\tag{2}$$

Задача (1), (2) эквивалентна системе интегральных уравнений:

$$\omega_1(s,t,x)=1+\int_0^s (1-x+\int_\tau^t \omega_1(\nu,t,x)d\nu+\omega_2(\tau,t,x))d\tau,$$

$$\omega_2(s,t,x)=x-\int_0^t \omega_1(\nu,t,x)d\nu+\int_0^s (1+\tau)d\tau=x-\int_0^t \omega_1(\nu,t,x)d\nu+s+s^2/2.$$

Поскольку она не решается в явном виде, применим метод последовательных приближений и приближенные вычисления на компьютере.

Обозначим

$$K(\tau,t,x;\omega(\nu,t,x):\nu)=\int_\tau^t \omega(\nu,t,x)d\nu.\tag{3}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}&\omega_1(s,t,x)=1+\int_0^s (1-x+K(\tau,t,x;\omega_1(\nu,t,x):\nu)+\omega_2(\tau,t,x))d\tau,\\ &\omega_2(s,t,x)=x-K(0,t,x;\omega_1(\nu,t,x):\nu)+s+s^2/2.\end{aligned}\tag{4}$$

Применен метод последовательных приближений.

Для приближенного решения этой системы была составлена программа с использованием формулы трапеций для вычисления интегралов. Она дала решение, близкое к точному (точное решение $u_1(t,x)=1+t,\ u_2(t,x)=x$).

Решается система (3)-(4) по формулам:

$$\omega_{10}(s,t,x)=1,$$

$$\omega_{20}(s,t,x)=x,$$

$$\omega_{2k+1}(s,t,x) = x - K(0,t,x;\omega_{1k}(\nu,t,x):\nu) + s + s^2/2.$$

$$\omega_{1k+1}(s,t,x) = 1 + \int_0^s (1 - x + K(\tau,t,x;\omega_{1k}(\nu,t,x):\nu) + \omega_{2k+1}(\tau,t,x))d\tau,$$

$$u_{1k+1}(t,x) = \omega_{1k+1}(t,t,x),\ u_{2k+1}(t,x) = \omega_{2k+1}(t,t,x),\ k = 0,1,2,..$$

где

$$K(\tau,t,x;\omega(\nu,t,x):\nu) = \int_\tau^t \omega(\nu,t,x)d\nu.$$

Оказалось достаточно меньше восьми итераций.
Программа на языке pascal и результаты расчетов:

```
PROGRAM mamb;
USES CRT, Dos;
var ht,ht2,hx,hx2,xx,tt,t2,int_1: real;
iterat,inu,nt,il,it,iss,nx,ix,n1t,n1x,it1,ix1,itau:byte;
mg1,mg2,int_1old: array[0..256,0..256] of real;
t: array[0..256] of real;
    {t1, t2, ...}
procedureit_ini;
begin
for it:=0 to nt do begin t[it]:=it*ht end; end;
proceduremg_ini;
begin
for it:=0 to nt do
foritau:=0 to it do
begin mg1[itau,it]:=1.; mg2[itau,it]:=xx end;
end;
{ integral_tau^t mg1 }
procedure int1{il,it};
vardm: real;
begin
int_1:=0.;
forinu:=il to it do
begindm:=mg1[inu,it]*ht;
if (inu=il) or (inu=it) then dm:=dm/2.;
int_1:=int_1+dm end;
ifil=it then int_1:=0.;
end;
begin {main}
clrscr;
writeln(' Zh. Mambetov. Method of additional argument');
writeln('  for systems of equations of first order');
writeln('  Osh тechnological university, 2019');
writeln;
writeln('   mg_1 = 1+ integr (integr); mg_2 = x - integr');
writeln;
write('   Input t, x: '); readln(tt,xx);
nt:=128; ht:=tt/nt; ht2:=ht/2.;
```

```
it_ini; mg_ini;
foriterat:=1 to 8 do
begin
for it:=0 to nt do
foriss:=0 to it do
beginil:=iss; int1; int_1old[iss,it]:=int_1 end;
for it:=0 to nt do
begin
foriss:=0 to it do
begin
mg1[iss,it]:=1.; mg2[iss,it]:=xx-int_1old[0,it]+t[iss]+sqr(t[iss])/2.;
foritau:=0 to iss do
begin
mg1[iss,it]:=mg1[iss,it]+(1.-xx+int_1old[itau,it]+mg2[itau,it])*ht;
end;
end;
end;
writeln(' iterat=',iterat:3,':  u_1(t,x), u_2(t,x) ~',mg1[nt,nt]:7:3,mg2[nt,nt]:7:3);
end;
readln;
end.
```

```
Zh. Mambetov. Method of additional argument
for systems of equations of first order
  Osh technological university, 2019
   mg_1 = 1+ integr (integr); mg_2 = x - integr
   Input t, x: 0.8 0.9
iterat=  1:  u_1(t,x), u_2(t,x) ~  1.893  1.220
iterat=  2:  u_1(t,x), u_2(t,x) ~  1.801  0.878
iterat=  3:  u_1(t,x), u_2(t,x) ~  1.804  0.896
iterat=  4:  u_1(t,x), u_2(t,x) ~  1.804  0.896
iterat=  5:  u_1(t,x), u_2(t,x) ~  1.804  0.896
iterat=  6:  u_1(t,x), u_2(t,x) ~  1.804  0.896
iterat=  7:  u_1(t,x), u_2(t,x) ~  1.804  0.896
iterat=  8:  u_1(t,x), u_2(t,x) ~  1.8
```

Литература:

1. **Панков П.С.** Приближенное решение начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента [Текст] / П.С. Панков, Т.М. Иманалиев, Г.М. Кененбаева // Юбилейная науч. конф., посвященная 50-летию развития математики в Академии наук Казахстана: Тез. докл. – Алматы, 1995. – С. 164.
2. **Аширбаева А.Ж.** Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента: Автореф. дисс. … докт. физ.-матем. наук, 01.01.02 [Текст] / А.Ж. Аширбаева. – Бищкек, 2012. – 34 с.
3. **Mamaziaeva E.** Solving of non-linear partial differential equations of second order with many variables by means of the method of additional argument [Текст] / Mamaziaeva E., Ashirbaeva A. // Abstracts of the Issyk-Kul International Mathematical Forum, Bosteri, Kyrgyzstan. 2015 / Ed. by Academician A.Borubaev. – P. 50.