УДК 517.968

Ободоева Гумушай Сансызбаевна к.ф.-м.н., доцент,
Тойгонбаева Айзат Куралбековна – к.ф.-м.н., доцент,
Ошский государственный университет
obodoevag@mail.ru

ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩЕГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА

Рассмотрена система линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в пространстве n-мерных вектор функций. Построен регуляризирующий оператор. Доказана теорема единственности решения.

Ключевые слова: Система интегральных уравнений, линейное уравнение, регуляризация, единственность, вектор функция.

Obodoeva Gumushay Sansyzbayevna - Ph.D., Associate professor,
Toygonbaeva Aizat Kuralbekovna - Ph.D., Associate professor,
Osh State University

CONSTRUCTION REGULARIZING OPERATOR FOR SYSTEM OF LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF VOLTERRA OF THE THIRD KIND

A system of linear integral equations of Volterra of the third kind in the space of n-dimensional vector functions is considered. A regularizing operator is constructed. The theorem of uniqueness for the solution is proved.

Key words: System of integral equations, linear equation, regularization, uniqueness, vector function.

Ободоева Гумушай Сансызбаевна – ф.-м.и.к., доцент,
Тойгонбаева Айзат Куралбековна ф.-м.и.к., доцент,
Ош мамлекеттик университети

ҮЧҮНЧҮ ТИПТЕГИ ВОЛЬТЕРРДИН СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ ҮЧҮН РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛООЧУ ОПЕРАТОРДУ ТУРГУЗУУ

Үчүнчү типтеги Вольтеррдин сызыктуу интегралдык теңдемелер системасы n-ченемдүү вектор функциялардын мейкиндигинде каралды. Регуляризациялоочу оператор тургузулду. Чечимдин жалгыз экендиги далилденди.

Негизги сөздөр: Интегралдык теңдемелердин системасы, сызыктуу теңдеме, регуляризация, жалгыздык, вектор функция.

Рассмотрим систему $a(t)U(t)+\int\limits_{t_0}^{t}K(t,s)U(s)ds = f(t), \quad t\in[t_0,\tau]$ (1)

где $K(t,s)-n\times n$ - матричная функция $U(t)$ и $f(t)$ соответственно искомая и заданная n - мерные вектор функции $a(t_0)=0$, $a(t)$ - неубывающая заданная функция.

Различные вопросы для интегральных уравнений исследовались во многих работах [1-2]. В частности, в работе [2] предложен метод регуляризации для интегрального уравнения Вольтерра третьего рода. В работе [1] исследовались вопросы единственности решения системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода. В данной работе используя метод, предложенный в [2] доказаны единственность решения и построен регуляризирующий оператор.

Наряду с системой (1) будем рассматривать следующую систему

$$(\varepsilon + a(t))\vartheta(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} K(t,s)\vartheta(s,\varepsilon)d\varepsilon = f(t) + \varepsilon U(t_0), \quad 2)$$

$t \in [t_0, T]$, где $0 < \varepsilon$ - малый параметр.

Обозначим через $\|A\|$ и $\|U\|$ нормы соответственно для $n \times n$ - матрицы A и для n - мерного вектора U. Будем обозначать через $C_n[t_0,T], C^{\gamma}_{\varphi,n}[t_0,T]$ пространства n - мерных вектор функций с элементами из $C[t_0,T], C^{\gamma}_{\varphi}[t_0,T]$ $(0<\gamma\le 1)$, а $\|\cdot\|_c$ норма в пространстве $C_n[t_0,T]$. Пусть $\lambda_i(t)$ $(i=1,2,...,n)$ - собственные значения матрицы $\frac{1}{2}[K(t,t)+K^*(t,t)]$, где $K^*(t,t)$ сопряженная матрица к матрице $K(t,t)$ и

$$\lambda(t) = \min_i \lambda_i(t). \qquad (3)$$

Потребуем выполнения следующих условий:1) Для $K(t,s) = (K_{ij}(t,s))_1^n$ при любом фиксированном $t \in (t_0,T]$ $K_{ij}(t,s) \in L^{q_1}(t_0,t), q_1 \ge 1$ и $K_{ij}(t,t) \in L^1(t_0,T),\ i,j = 1,2,...,n$;

2) $\lambda(t) \ge 0$ при $t \in [t_0,T]$ и $\lambda(t) \in L^1(t_0,T)$, где $\lambda(t)$ - определена с помощью формулы (3);

3) при $\tau > \eta$ для любых $(\tau,s),(\eta,s) \in G = \{(t,s): t_0 < s < t < T\}$ справедлива оценка $\|K(\tau,s) - K(\eta,s)\| \le l(s)\int_{\eta}^{\tau}\lambda(s)ds$, где $l(t) \ge 0$ при $t \in [t_0,T], l(t) \in L^{q_1}(t_0,T), q_1 \ge 1$

Лемма 1. Пусть

$$\psi(t,\varepsilon) = (\varepsilon + a(t))^{-1}\varepsilon[U(t) - U(t_0)]X(t,t_0,\varepsilon) + $$
$$+\int_{t_0}^{t} R(t,\tau,\varepsilon)[\varepsilon + a(\tau)]^{-1}\varepsilon[U(t)-U(\tau)]d\tau, \quad \varepsilon > 0 \qquad (4)$$

где $a(t_0) = 0, a(t)$ - неубывающая непрерывная функция на $[t_0;\tau]$, $R(t,s,\varepsilon) = -(\varepsilon + a(t))^{-1}X(t,s,\varepsilon)K(s,s)$ - резольвента матричного ядра $-(\varepsilon + a(t))^{-1}K(s,s), X(t,s,\varepsilon)$ - матричная функция Коши для системы $\frac{d\vartheta}{dt} = -(\varepsilon + a(t))^{-1}K(t,t)\vartheta(t)$. Тогда

1) если $U(t) \in C_n[t_0,T], \lambda(t) > 0$ при почти всех $t \in [t_0,T], \varphi(t) = \int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds,\ t \in [t_0,T]$ и $\|K(t,t)\| \le N_0\lambda(t)$ при почти всех $t \in [t_0,T], \lambda(t) \in L^1(t_0,T),\ N_0 > 0$, то на сегменте $[t_0,T]$ справедлива оценка

$$\|\psi(t,\varepsilon)\| \le (2N_0+1)B_0\varepsilon^{1-\beta}\|U(t)\|_C + (N_0+1)\omega_{й}(\varepsilon) \qquad (5)$$

где β - произвольное число из интервала $(0,1)$,

$\omega_{й}(\delta) = \sup_{|x-\nu|\le\delta}\|U(\varphi^{-1}(x)) - U(\varphi^{-1}(\nu))\|,\ x,\nu \in [0,\varphi(T)],$

$\varphi^{-1}(x)$- обратная функция к функции $\varphi(t)$, $B_0=\sup\limits_{\mu\geq 0}\mu e^{-\mu}$;

2) если $U(t)\in C^{\gamma}_{\varphi,n}[t_0,T]$, $0<\gamma\leq 1$, $\|K(t,t)\|\leq N_0\lambda(t)$, $\lambda(t)\in L^1(t_0,T)$ и $\lambda(t)\geq 0$ при $t\in[t_0,T]$, то

$$\|\psi(t,\varepsilon)\|\leq M_\gamma\left(B'+N_0B_1'\right)\varepsilon^{\gamma}, \qquad (6)$$

где $M_\gamma=\sup\limits_{t,\tau\in[t_0,T]}\|U(t)-U(\tau)\|/|\varphi(t)-\varphi(\tau)|^{\gamma}$,

$B'=\sup\limits_{\tau\geq 0}P\left(\eta^{\gamma}e^{-\eta}\right)$, $B_1'=\int\limits_0^{\infty}e^{-z}z^{\gamma}dz.$

Доказательство. а) Пусть $t_0\leq t\leq\varphi^{-1}\left(\varepsilon^{\gamma}\right)$, $0<\beta<1$, $\tau=\varphi^{-1}(\upsilon)$, $t_0\leq\tau\leq t\leq\varphi^{-1}\left(\varepsilon^{\beta}\right)$, $t_0\leq\varphi^{-1}(\upsilon)\leq\varphi^{-1}(x)$, $0\leq\upsilon\leq x\leq\varepsilon^{\beta}$,

$$|x-\upsilon|\leq\varepsilon^{\beta},\ x=\varphi(t),\ t=\varphi^{-1}(x),\ \varphi(t_0)=0,\ t_0\leq t\leq\varphi^{-1}\left(\varepsilon^{\beta}\right)\underset{\beta}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow t_0\leq\varphi^{-1}(x)\leq\varphi^{-1}\left(\varepsilon^{\beta}\right),\ 0\leq\varphi\varphi^{-1}(x)\leq\varphi\varphi^{-1}\left(\varepsilon^{\beta}\right)\Leftrightarrow 0\leq x\leq\varepsilon^{\beta}.$$

Тогда $\|\psi(t,\varepsilon)\|\leq\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon=a(t)}\omega_{й}\left(\varepsilon^{\beta}\right)e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon=a(s)}ds}+\omega_{й}\left(\varepsilon^{\beta}\right)^{-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\varepsilon}{\varepsilon=a(\tau)}(\varepsilon+a(t))^{-1}}e^{-\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon=a(s)}ds}\|K(\tau,\tau)\|d\tau\leq$

$$\leq\omega_{й}\left(\varepsilon^{\beta}\right)e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds}+\omega_{й}\left(\varepsilon^{\beta}\right)N_0\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\varepsilon}{\varepsilon+a(s)}e^{-\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds}\frac{\lambda(\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau\leq$$

$$\leq\omega_{й}\left(\varepsilon^{\beta}\right)\left[e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds}+N_0e^{-\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds}d_{\tau}\left[-\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds\right]=\right.$$

$$=\omega_{й}\left(\varepsilon^{\beta}\right)\left[e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds}+N_0\,e^{-\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds}\Big|_{\tau=t_0}^{\tau=t}\right]= \qquad (7)$$

$$=\omega_{й}\left(\varepsilon^{\beta}\right)\left[e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds}+N_0-N_0e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds}\right]\leq(N_0+1)\omega_{й}\left(\varepsilon^{\beta}\right);$$

б) если $\varphi^{-1}\left(\varepsilon^{\beta}\right)\leq t\leq T\Rightarrow\varepsilon^{\beta}\leq\varphi(t)\leq\varphi(T)$, $a(t)\geq a(\tau)$ при $t\geq\tau$

$$e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds}\leq e^{-\frac{1}{\varepsilon+a(t)}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda(s)ds}=e^{-\frac{1}{\varepsilon+a(t)}\varphi(t)}\leq e^{-\frac{\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon+a(t)}}$$

$$\left\|-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+a(t)}[U(t)-U(t_0)]X(t,t_0,\varepsilon)\right\|\leq\frac{\varepsilon}{\varepsilon+a(t)}\|U(t)\|_C\,e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds}\leq$$

$$\leq\|U(t)\|_C\,\varepsilon^{1-\beta}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon+a(t)}e^{-\frac{\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon+a(t)}}\right]\leq\|U(t)\|_C\,\varepsilon^{1-\beta}\sup_{\mu\geq 0}\left(\mu e^{-\mu}\right)=B_0\|U(t)\|_C\,\varepsilon^{1-\beta}, \qquad (8)$$

$$\left\| -\int_{t_0}^{t} R(t,\tau,\varepsilon)[\varepsilon+a(\tau)]^{-1}\varepsilon[U(t)-U(\tau)]d\tau \right\| = \int_{t_0}^{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^{\beta})} R(t,\tau,\varepsilon)[\varepsilon+a(\tau)]^{-1}\times$$

$$\times\varepsilon[U(t)-U(\tau)]d\tau + \int_{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^{\beta})}^{t} R(t,\tau,\varepsilon)[\varepsilon+a(\tau)]^{-1}\varepsilon[U(t)-U(\tau)]d\tau \| \le$$

$$\le \int_{t_0}^{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^{\beta})} 2\|U(t)\|_C \frac{\varepsilon}{\varepsilon+a(\tau)}\cdot\frac{1}{\varepsilon+a(t)} e^{-\int_{\tau}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(\tau)}ds} \|K(\tau,\tau)\| d\tau +$$

$$+ \int_{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^{\beta})}^{t} \omega_{й}(\varepsilon^{\beta}) \frac{\varepsilon}{\varepsilon+a(\tau)}\cdot\frac{1}{\varepsilon+a(t)} e^{-\int_{\tau}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(\tau)}ds} \|K(\tau,\tau)\| d\tau =$$

$$= 2\|U(t)\|_C N_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon+a(t)} e^{-\int_{\tau}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds} \Big|_{\tau=t_0}^{\tau=\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^{\beta})} + \omega_{й}(\varepsilon^{\beta}) N_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon+a(t)} e^{-\int_{\tau}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds} \Big|_{\tau=\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^{\beta})}^{\tau=t} \le$$

$$\le 2\|U(t)\|_C N_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon+a(t)} e^{-\frac{1}{\varepsilon+a(t)}\int_{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^{\beta})}^{t}\lambda(s)ds} + \omega_{й}(\varepsilon^{\beta})N_0 = 2\|U(t)\|_C N_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon+a(t)}\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{\varepsilon+a(t)}\left[\varphi(t)-\varphi\left(\varphi^{-1}(\varphi(t))-\varepsilon^{\beta}\right)\right]} + \omega_{й}(\varepsilon^{\beta})N_0 = 2\|U(t)\|_C \frac{\varepsilon^{1-\beta}\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon+a(t)} e^{-\frac{\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon+a(t)}} + \qquad (9)$$

$$+ \omega_{й}(\varepsilon^{\beta})N_0 \le 2\|U(t)\|_C N_0\varepsilon^{1-\beta}\sup_{\mu\ge 0}(\mu e^{-\mu}) + N_0\omega_{й}(\varepsilon^{\beta}) \le$$

$$\le 2\|U(t)\|_C N_0 B_0\varepsilon^{1-\beta} + \omega_{й}(\varepsilon^{\beta})N_0.$$

Учитывая (7), (8) и (9) из (4) получаем оценку (5)

2) если $U(t)\in C^{\gamma}_{\varphi,n}[t_0,T]$ тогда

$$\left\| -\frac{\varepsilon}{\varepsilon+a(t)}[U(t)-U(t_0)]X(t,t_0,\varepsilon) \right\| \le \frac{\varepsilon M_{\gamma}|\varphi(t)|^{\gamma}}{\varepsilon+a(t)} e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds}$$

$$\le \frac{\varepsilon M_{\gamma}}{\varepsilon+a(t)}|\varphi(t)|^{\gamma} e^{-\frac{1}{\varepsilon+a(t)}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds} = \frac{\varepsilon M_{\gamma}}{\varepsilon+a(t)}|\varphi(t)|^{\gamma} e^{-\frac{1}{\varepsilon+a(t)}\varphi(t)} = \qquad (10)$$

$$= \frac{\varepsilon M_{\gamma}}{(\varepsilon+a(t))^{1-\gamma}}\cdot\frac{[\varphi(t)]^{\gamma}}{[\varepsilon+a(t)]^{\gamma}} e^{-\frac{\varphi(t)}{\varepsilon+a(t)}} \le M_{\gamma}\varepsilon^{\gamma}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+a(t)}\right)^{1-\gamma}\sup_{\eta\ge 0}(\eta^{\gamma}e^{-\eta}) \ge M_{\gamma}e^{\gamma}B',$$

$$\left\| -\int_{t_0}^{t} R(t,\tau,\varepsilon)[\varepsilon+a(t)]^{-1}\varepsilon[U(t)-U(\tau)]d\tau \right\| \le \int_{t_0}^{t}\frac{1}{\varepsilon+a(t)} e^{-\int_{\tau}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(t)}ds} N_0\lambda(\tau)\times$$

$$\times\frac{\varepsilon M_{\gamma}|\varphi(t)-\varphi(\tau)|}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau \le \frac{\varepsilon N_0 M_{\gamma}}{(\varepsilon+a(t))^{1-\gamma}}\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda(\tau)}{\varepsilon+a(\tau)} e^{-\int_{\tau}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds}\times$$

$$(11)$$

$$\times\left[\int_{\tau}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds\right]^{\gamma} d\tau = \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon+a(t)}\right]^{1-\gamma} N_0 M_{\gamma}\varepsilon^{\gamma}\int_{0}^{\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds} e^{-z}z^{\gamma}dz \le$$

$$\le N_0 M_{\gamma}\varepsilon^{\gamma}\int_{0}^{\infty} e^{-z}z^{\gamma}dz = N_0 M_{\gamma}B_1'\varepsilon^{\gamma},$$

где $z=\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds,\quad dz=\frac{\lambda(\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau.$

Учитывая (10), (11) из (4) получаем оценку (6).

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть выполняются условия 1-3 и

$$H(t,s,\varepsilon)=[\varepsilon+a(t)]^{-1}X(t,s,\varepsilon)[K(t,s)-K(s,s)]+ \\ +\int\limits_{s}^{t}R(t,\tau,\varepsilon)[\varepsilon+a(\tau)]^{-1}[K(t,s)-K(\tau,s)]d\tau \qquad (12)$$

Тогда справедлива оценка $\|H[t,s,\varepsilon]\|\le(B_1+N_0)\ell(s),$ (13) где $B_1=\sup\limits_{\nu\ge0}\nu e^{-\nu}$

Доказательство.

$$\|H(t,s,\varepsilon)\|\le(\varepsilon+a(t))^{-1}\|X(t,s,\varepsilon)\|\ell(s)\left[\int\limits_{s}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right]+$$

$$\int\limits_{s}^{t}(\varepsilon+a(\tau))^{-1}\|R(t,\tau,\varepsilon)\|\ell(s)\left(\int\limits_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)d\tau\le(\varepsilon+a(t))^{-1}e^{-\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\lambda(\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau}\ell(s)\int\limits_{s}^{t}\lambda(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_{s}^{t}(\varepsilon+a(\tau))^{-1}\frac{1}{\varepsilon+a(t)}e^{-\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\lambda(\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau}\|K(\tau,\tau)\|\ell(s)\left(\int\limits_{s}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right)\le$$

$$\ell(S)e^{-\int\limits_{s}^{t}\frac{\lambda(\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau}\int\limits_{s}^{t}\frac{\lambda(\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau+\ell(S)N_o\int\limits_{s}^{t}\frac{\lambda(\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}e^{-\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds}\left(\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds\right)d\tau\le$$

$$\le\ell(S)\left[\sup_{\upsilon\ge0}\upsilon e^{-\upsilon}\right]+N_0\ell(s)\int\limits_{0}^{\int\limits_{s}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds}e^{-\upsilon_1}\upsilon_1d\upsilon_1=(B_1+N_0)\ell(s),$$

где $\upsilon=\int\limits_{s}^{t}\frac{\lambda(\tau)}{\varepsilon+a(\tau)}d\tau,\quad \upsilon_1=\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+a(s)}ds.$

Лемма доказана.

Доказана следующая теорема

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1-3, $a(t)\in C[t_0,T],\ a(t_0)=0,\ a(t)-$ неубывающая функция на $[t_0,T],\ \varphi(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\lambda(s)ds,\quad t\in[t_0,T].$ Тогда если $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T],\ \|K(t,t)\|\le N_0\lambda(t), t\in[t_0,T]$ и система (1) имеет решение $U(t)\in C_n[t_0,T]$, то решение $\vartheta(t,\varepsilon)$ системы (2) при $\varepsilon\to0$ сходится по норме $C_n[t_0,T]$ к $U(t)$. При этом справедлива оценка

$$\|\vartheta(t,\varepsilon)-U(t)\|_C\le K(2N_0+1)B_0\varepsilon^{1-\beta}\|U(t)\|_C+K(N_0+1)\omega_{й}(\varepsilon^{\beta}),(14)$$

где β - произвольное число из интервала (0,1),

$K=exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\ell(s)[B_1+N_0]\right].$ B_0, B_1 – определены в леммах 1 и 2,

$$\omega_{й}(\delta)=\sup_{|x-\upsilon|\le\delta}\|U(\varphi^{-1}(x))-U(\varphi^{-1}(\upsilon))\|;$$

$$x,\upsilon\in[0,\varphi(T)],$$

$\varphi^{-1}(x)$ – обратная функция к функции

1) если $\|K(t,t)\| \le N_0\lambda(t)$ при $t \in [t_0, T]$ и система (1) имеет решение $U(t) \in C^{\gamma}_{\varphi,\eta}[t_0, T],\ 0 < \gamma \le 1$ то решение $\vartheta(t,\varepsilon)$ системы (2) при $\varepsilon \to 0$ сходится по норме $C_n[t_0, T]$ к $U(t)$. При этом справедлива оценка

$$\|\vartheta(t,\varepsilon) - U(t)\|_C \le KM_{\gamma}\left(B' + B_1{}' N_0\right)\varepsilon^{\gamma}, (15)$$

где $K = exp\left[\int_{t_0}^{t} \ell(S)(B_1 + N_0)\right],\ B' = \sup_{\eta \ge 0}(\eta^{\gamma} e^{-\eta}),\ B_1{}' = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\gamma} dz,$

$$M_{\gamma} = \sup_{t,\tau \in [t_0, T]} \|U(t) - U(\tau)\| / |\varphi(t) - \varphi(\tau)|^{\gamma}.$$

Следствие 1. Если выполняются условия 1-3, $\|K(t,t)\| \le N_0\lambda(t),\ \lambda(t) > 0$ при почти всех $t \in [t_0, T]$, то решение системы (1) в пространстве $C_n[t_0, T]$ единственно.

Следствие 2. Если выполняются условия 1-3, $\|K(t,t)\| \le N_0\lambda(t)$ при $t \in [t_0, T]$ и существует число $\delta \in [t_0, T]$ такое, что $\lambda(t) > 0$ при почти всех $t \in [t_0, \delta]$, то решение системы (1) единственно в пространстве $C^{\gamma}_{\varphi,n}[t_0, T],\ 0 < \gamma \le 1,\ \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(s) ds$.

Литература:

1. **Asanov A.** Regulization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind. Utrecht, VSP, 1998, 272 p.
2. **Асанов А.** Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] Г. Ободоева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек. Илим, 1994-вып. № 25 -С.65-74

УДК 517.968

Аширбаева Айжаркын Жоробековна – д.ф.-м.н., профессор,
Ошский технологический университет

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА К ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрено применение метода дополнительного аргумента к интегро-дифференциальным уравнениям высшего порядка со многими переменными.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, интегро–дифференциальное уравнение, метод дополнительного аргумента, задача Коши, принцип сжимающих отображений.

Аширбаева Айжаркын Жоробековна – ф.-м.и.д., профессор,
Ош технологиялык университети

ЖОГОРКУ ТАРТИПТЕГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРГЕ КОШУМЧА АРГУМЕНТ КИЙИРҮҮ УСУЛУН КОЛДОНУУ

Көп өзгөрүлмөлүү, жогорку тартиптеги интегро-дифференциалдык теңдемелерге кошумча аргумент кийирүү усулун колдонуу каралган.

Урунттуу сөздөр: Жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме, интегро-дифференциалдык теңдеме, кошумча аргумент кийирүү усулу, Коши маселеси, кысып чагылтуулар принциби

Ashirbaeva Ayzharkyn Zhorobekovna
Doctor of physical and Mathematical sciences, Professor,
Osh Technological University

APPLICATION OF THE METHOD OF ADDITIONAL ARGUMENT TO A INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE HIGHER ORDER

The method of the additional argument was applied to integral-differential equations of higher order with many variables.

Key words: partial differential equation, integral-differential equation, method of additional argument, Cauchy problem, contracting mappings principle.

В данной работе рассматривается вопрос о решении задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения с частными производными высшего порядка вида:

$$D^n[\omega_1,\omega_2,...,\omega_n]D^n[-\omega_1,-\omega_2,...,-\omega_n]u(t,x)= g(t,x,u(t,x))+\int_0^t K(t,s)u(s,x)ds, \quad (1)$$

$$D[\omega_1,\omega_2,...\omega_n]=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\omega_k\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad n\in N, \quad x=(x_1,x_2,...,x_n),$$

$$\omega_i=a_i(t,x), \quad i=1,2,...,n, \quad (t,x)\in G_{n+1}(T)$$

с начальными условиями

$$\frac{\partial^k u(0,x)}{\partial t^k}=u_k(x), \quad k=0,1\ldots,...,2n-1, \quad x\in R^n, \quad (2)$$

где $n\in N$.

Для задачи (1), (2) последовательно применяем метод дополнительного аргумента (как было предложено в работах [1-2].

Воспользуемся обозначениями $z(t,x;u)=D^n[-\omega_1,-\omega_2,...,-\omega_n)]u(t,x)$,

$$D^k[\omega_1,\omega_2,...,\omega_n]z(t,x;u)\big|_{t=0}=\psi_k(x), \quad k=1,...,n-1.$$

Тогда

$$D^{n-1}[\omega_1,\omega_2,...,\omega_n]z(t,x;u)=\psi_{n-1}(p(0,t,x))+$$
$$+\int_0^t g(\rho,p(\rho,t,x),u(\rho,p(\rho,t,x))d\rho+\int_0^t\int_0^\rho K(\rho,s)u(s,p(\rho,t,x))dsd\rho,$$

$$D^{n-2}[\omega_1,\omega_2,...,\omega_n]z(t,x;u)=\psi_{n-2}(p(0,t,x))+\psi_{n-1}(p(0,t,x))t+$$
$$+\int_0^t (t-\rho)g(\rho,p(\rho,t,x),u(\rho,p(\rho,t,x))d\rho+\int_0^t\int_0^\rho (t-\rho)K(\rho,s)u(s,p(\rho,t,x))dsd\rho,$$

$$D[\omega_1,\omega_2,...,\omega_n]z(t,x;u)=\sum_{k=1}^{n-1}\psi_k(p(0,t,x))\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}+\int_0^t\frac{(t-\rho)^{n-2}}{(n-2)!}\times$$
$$\times g(\rho,p(\rho,t,x),u(\rho,p))d\rho+\int_0^t\int_0^\rho\frac{(t-\rho)^{n-2}}{(n-2)!}K(\rho,s)u(s,p(\rho,t,x))dsd\rho.$$

Из последнего уравнения получаем:

$$z(t,x;u)=\sum_{k=0}^{n-1}\psi_k(p(0,t,x))\frac{t^k}{k!}+\int_0^t\frac{(t-\rho)^{n-1}}{(n-1)!}g(\rho,p(\rho,t,x),u(\rho,p))d\rho+$$

$$+\int_0^t\int_0^\rho\frac{(t-\rho)^{n-1}}{(n-1)!}K(\rho,s)u(s,p(\rho,t,x))dsd\rho, \qquad (3)$$

где $p(s,t,x\ )=(p_1(s,t,x),p_2(s,t,x),...,p_n(s,t,x))$ - решение следующей системы интегральных уравнений

$$p_k(s,t,x)=x_k-\int_s^t a_k(\nu,p(\nu,t,x)d\nu,\quad k=1,...,n,\ (s,t,x)\in Q_2^n(T),\ (4)$$

где $Q_n^n(T)=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_n,x)\big|0\le t_1\le t_2\le t_3\le...\le t_n\le T,\ x\in R^n\};$

Система уравнений (4) имеет единственное решение, удовлетворяющее системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial p_k(s,t,x)}{\partial t}+\sum_{i=1}^n a_i(t,x)\frac{\partial p_k(s,t,x)}{\partial x_i}=0,\quad p_k(s,s,x)=x_k,\quad k=1,...n.$$

Находим решения задачи (3), (2), уменьшая порядок дифференциального уравнения, методом дополнительного аргумента.

Введем обозначение

$$D^k[-\omega_1,-\omega_2,...,-\omega_n]u(t,x)\big|_{t=0}=\theta_k(x),\quad k=1,...,n-1.$$

Тогда из (3) с (2) имеем следующие:

$$D^{n-1}[-\omega_1,-\omega_2,...,-\omega_n]u(t,x)=\theta_{n-1}(q(0,t,x)+\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^t\psi_k(p(0,s,q(s,t,x)))\frac{s^k}{k!}ds+$$

$$+\int_0^t\int_0^s\frac{(s-\rho)^{n-1}}{(n-1)!}g(\rho,p(\rho,s,q(s,t,x)),u(\rho,p(\rho,s,q(s,t,x)))d\rho ds+$$

$$+\int_0^t\int_0^s\int_0^\rho\frac{(s-\rho)^{n-1}}{(n-1)!}K(\rho,\tau)u(\tau,p(\rho,s,q(s,t,x)))d\tau d\rho ds,$$

$$D[-\omega_1,-\omega_2,...,-\omega_n]u(t,x)=\sum_{k=1}^{n-1}\theta_k(q(0,t,x)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^t\frac{(t-s)^{n-2}}{(n-2)!}\psi_k(p(0,s,q(s,t,x)))\frac{s^k}{k!}ds+$$

$$+\int_0^t\frac{(t-s)^{n-2}}{(n-2)!}\int_0^s\frac{(s-\rho)^{n-1}}{(n-1)!}g(\rho,p(\rho,s,q(s,t,x)),u(\rho,p(\rho,s,q(s,t,x)))d\rho ds+$$

$$+\int_0^t\frac{(t-s)^{n-2}}{(n-2)!}\int_0^s\int_0^\rho\frac{(s-\rho)^{n-1}}{(n-1)!}K(\rho,\tau)u(\tau,p(\rho,s,q(s,t,x)))d\tau d\rho ds.$$

Из последнего уравнения получаем:

$$u(t,x)=J(t,x;u)\equiv\sum_{k=0}^{n-1}\theta_k(q(0,t,x)\frac{t^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\psi_k(p(0,s,q(s,t,x)))\frac{s^k}{k!}ds+$$

$$+\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^s \frac{(s-\rho)^{n-1}}{(n-1)!} g(\rho, p(\rho,s,q(s,t,x)), u(\rho, p(\rho,s,q(s,t,x)))d\rho ds +$$

$$+\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^s\int_0^\rho \frac{(s-\nu)^{n-1}}{(n-1)!} K(\rho,\tau)u(\tau,p(\rho,s,q(s,t,x)))d\tau d\rho ds, \quad (5)$$

где $q\ (s,t,x\ ) = (q_1(s,t,x), q_2(s,t,x),..., q_n(s,t,x)),$- решение следующей системы интегральных уравнений

$$q_k(s,t,x) = x_k + \int_s^t a_k(\nu, q(\nu,t,x)d\nu,\ (s,t,x)\in Q_2^n(T), \quad k=1,2,3,...,n. \quad (6)$$

Система уравнений (6) имеет единственное решение, удовлетворяющее системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial q_k(s,t,x)}{\partial t} - \sum_{i=1}^n a_i(t,x)\frac{\partial q_k(s,t,x)}{\partial x_i} = 0, \quad q_k(s,s,x) = x_k, \quad k=1,...n.$$

Используем классы функций, введенные в работе [3].

Теорема. Пусть $a_i(t,x)\in \overline{C}^{(2n)}(G_{n+1}(T)), \qquad i=1,2,..n,$

$g(t,x,u)\in \overline{C}^{(2n)}(G_{n+1}(T)\times R)\cap Lip|_u(L), \qquad K(t,s)\in \overline{C}(G).$

Тогда интегральное уравнение (5) имеет единственное решение в области $\overline{C}^{(2n)}(G_{n+1}(T^*))$, где T^* - достаточно мало.

Доказательство. При доказательстве теоремы используем следующую лемму. *Лемма.* Если для банахова пространства *B* оператор

$J{:}C([0,T]\to B)\to C([0,T]\to B)$ в любом шаре $S=\{u{:}||u||_{C([0,T]\to B)}\le r_0 \ =const\}$ удовлетворяет условию Липшица типа запаздывания:

$(\forall t\in[0,T])(|| Ju_1(t) - Ju_2(t)||_B\le L_S t|| u_1 - u_2||_{C([0.t]\to B)}), L_S=const,$ зависит только от выбора шара *S*, то операторное уравнение $u=Ju$ при достаточно малом T^* имеет решение в $C([0,T^*]\to B)$.

Доказательство леммы. Положим $r_0 = 2||J(0)||_B$и $T^* = min\ \{T,1/(2L_S)\}$. Тогда решение в шаре существует.

Для интегрального уравнения (5) применяем метод сжатых отображений.

А именно, справедливо неравенство

$$\|J(t,x;u_1) - J(t,x;u_1)\| \le \Omega(t)\|u_1(t,x) - u_2(t,x)\|,$$

$$\Omega(t) = t(Lt^{2n-1}/(2n!) + \|K\|\, t^{2n}/(2n+1)!).$$

Применение Леммы заканчивает доказательство. Теорема доказана.

Пример. Пусть в уравнении (1) $n=1, \quad a_1 = y, \quad a_2 = x, \quad K(t,s)=0$.

Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$u_{tt}(t,x,y) = y^2u_{xx}(t,x,y) + 2xyu_{xy}(t,x,y) + x^2u_{yy}(t,x,y) +$$

$$+ yu_y(t,x,y) + xu_x(t,x,y) + g(t,x,y,u), \quad (t,x,y)\in G_3(T), \quad (7)$$

или в операторном виде:

$$D[y,x]D[-y,-x]u(t,x) = g(t,x,y,u).$$

Рассмотрим уравнение (7) с начальными условиями:

$$\begin{cases} u(0,x,y) = u_0(x,y) \\ u_t(0,x,y) = u_1(x,y). \end{cases} \quad (8)$$

Обозначая через

$z(t,x,y;u)=D[-y,-x]u(t,x),\ z(t,x,y;u)\big|_{t=0}=\psi(x,y),$

сводим задачу (7),(8) к решению интегрального уравнения

$$z(t,x,y)=\psi(p_1(0,t,x,y),p_2(0,t,x,y))+$$
$$\int_0^t g(s,p_1(s,t,x,y),p_2(s,t,x,y))u(s,p_1(s,t,x,y),p_2(s,t,x,y))ds,\quad (9)$$

где $p_1(s,t,x,y),p_2(s,t,x,y)-$решение системы уравнений:

$$\begin{cases} p_1(s,t,x,y)=x-\int_s^t p_2(\nu,t,x,y)d\nu \\ p_2(s,t,x,y)=y-\int_s^t p_1(\nu,t,x,y)d\nu, \quad (s,t,x)\in Q_2^2(T). \end{cases} \quad (10)$$

Применяя метод последовательных приближений для (10), полагая $p_1^o=x, p_2^o=y,$ находим решение:

$$p_1(s,t,x,y)=x\,ch(t-s)-y\,sh(t-s),\ p_2(s,t,x,y)=ych(t-s)-xsh(t-s).$$

Для $p_1(s,t,x,y),p_2(s,t,x,y)$ справедливы следующие равенства:

$$p_1(s,s,x,y)=x,\ p_2(s,s,x,y)=y,$$
$$\frac{\partial p_1}{\partial t}+y\frac{\partial p_1}{\partial x}+x\frac{\partial p_1}{\partial y}=0,\ \frac{\partial p_2}{\partial t}+y\frac{\partial p_2}{\partial x}+x\frac{\partial p_2}{\partial y}=0,$$
$$p_1(s,\tau,p_1(\tau,t,x,y),p_2(\tau,t,x,y))=p_1(s,t,x,y)\quad (11)$$
$$p_2(s,\tau,p_1(\tau,t,x,y),p_2(\tau,t,x,y))=p_2(s,t,x,y).$$

Интегральное уравнение (1) с начальными условиями (8) сводится к интегральному уравнению:

$$u(t,x,y)=u_0(q_1(0,t,x,y),q_2(0,t,x,y))+$$
$$+\int_0^t \psi\big(p_1(0,s,q_1(s,t,x,y),q_2(s,t,x,y)),p_2(0,s,q_1(s,t,x,y),q_2(s,t,x,y)\big)ds+$$
$$\int_0^t\int_0^s g\big(\nu,p_1(\nu,s,q_1,q_2),p_2(\nu,s,q_1,q_2),u\big(\nu,p_1(\nu,s,q_1,q_2),p_2(\nu,s,q_1,q_2)\big)\big)d\nu ds,\quad (12)$$

где

$q_1(s,t,x,y),q_2(s,t,x,y)-$решение системы уравнений:

$$\begin{cases} q_1(s,t,x,y)=x+\int_s^t q_2(\nu,t,x,y)d\nu \\ q_2(s,t,x,y)=y+\int_s^t q_1(\nu,t,x,y)d\nu \end{cases} \quad (13)$$

Из (13) имеем:

$$q_1(s,t,x,y)=x\,ch(t-s)+y\,sh(t-s),\ q_2(s,t,x,y)=y\,ch(t-s)+x\,sh(t-s).$$

Найдем

$$p_1(s,\tau,q_1(\tau,t,x,y),q_2(\tau,t,x,y))=x\,ch(2\tau-t-s)-y\,sh(2\tau-t-s),$$
$$p_2(s,\tau,q_1(\tau,t,x,y),q_2(\tau,t,x,y))=y\,ch(2\tau-t-s)-x\,sh(2\tau-t-s).$$

Тогда из (12) имеем:

$$u(t,x,y)=u_0(xcht+ysht,ycht+xsht)+$$
$$+\int_0^t \psi\big(xch(2s-t)+ysh(2s-t),ych(2s-t)+xsh(2s-t)\big)ds+$$
$$+\int_0^t\int_0^\nu g\big(\nu,xch(2\nu-t-s)-ysh(2\nu-t-s),ych(2\nu-t-s)-xsh(2\nu-t-s),u(\nu,xch(2\nu-t-s)-$$
$$-ysh(2\nu-t-s),ych(2\nu-t-s)-xsh(2\nu-t-sd\nu))dsd\nu. \qquad (14)$$

Интегральное уравнение (14) согласно принципу сжатых отображений при $t<\sqrt{\dfrac{2}{L}}$ имеет единственное решение. Если функция gне зависит от неизвестной функции, то получаем решение задачи в виде:

$$u(t,x,y)=u_0(x\,cht+y\,sht,y\,cht+x\,sht)+$$
$$+\int_0^t \psi\big(x\,ch(2s-t)+y\,sh(2s-t),y\,ch(2s-t)+x\,sh(2s-t)\big)ds+$$
$$+\int_0^t\int_0^\nu g\big(\nu,x\,ch(2\nu-t-s)-y\,sh(2\nu-t-s),y\,ch(2\nu-t-s)-x\,sh(2\nu-t-s)))dsd\nu.$$

Литература:

1. **Аширбаева, А.Ж.** Метод дополнительного аргумента в теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка [Текст] / А.Ж. Аширбаева, М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев // Исследо-вания по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1997. – Вып. 26. – С. 3–8.
2. **Аширбаева, А.Ж.** О существовании и единственности решений нелиней-ных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с (n+1) независимыми переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Вестник ОшГУ. Серия физико-математических наук. - 2001. - № 3. - С. 59-63.
3. **Аширбаева, А.Ж.** Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева – Бишкек: Илим, 2013 – 134 с.