УДК 517.946.9

Такеева Анара Раимбердиевна – магистрант,
Турдалиев Эралы Рахманалиевич – магистрант,
Калыкул кызыГулина – магистрант,
Ошский технологический университет

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ГАУССА И ГРИНА

Развивается метод обобщенных функций для решения краевых задач для одного класса стационарных бегущих решений волнового уравнения в N-мерных цилиндрических областях. Рассмотрены случаи дозвукового и сверхзвукового движения источника возмущений, что влияет на тип уравнения, который при дозвуковых скоростях в подвижной системе координат становится эллиптическим, а при сверхзвуковой скорости – гиперболическим. С использованием теории обобщенных функций получены динамические аналоги формул Грина и Гаусса в пространстве обобщенных функций и даны их интегральные представления для разных N.

Ключевые слова: фундаментальные решения, формулы Гаусса, формула Грина, краевая задача, неоднородное функционально-дифференциальное уравнение, задача Коши.

Такеева Анара Раимбердиевна – магистрант,
Турдалиев Эралы Рахманалиевич – магистрант,
Калыкул кызыГулина – магистрант,
Ош технологиялык университети

ТЕРМЕЛҮҮ ПРОЦЕСТЕРИНИН ФУНДАМЕНТАЛДЫК ЧЕЧИМДЕРИ. ГРИНДИН ЖАНА ГАУССТУН ФОРМУЛАЛАРЫНЫН АНАЛОГУ

Макалада N өлчөмдүү цилиндрдик областтардын туруктуу толкундук теңдемелери үчүн четки чечимдерди чечүүдө жалпыланган функциялардын ыкмалары иштеп чыгарылган. Теңдеменин тибине таасир этүүчү үн ылдамдыгына чейинки жана жогорку үндүк кыймылдын булактары каралган, үн ылдамдыгына чейинки ылдамдыкта кыймылдуу координата системасында эллиптикалык, ал эми жогорку үндүк ылдамдыкта – гиперболикалык болот. Жалпыланган функциялар теориясын колдонуу менен Грин жана Гаусстун формулаларынын динамикалык аналогдору табылган жана алардын ар кандай өлчөмдөгү итегралдык чечими берилген.

Негизги сөздөр: фундаменталдык чечимдер, Гриндин жана Гаусстун формулалары, четки чечимдер, функционалдык-дифференциадык бир тектүү эмес теңдемелер,Кошинин маселеси.

Takeeva Anara Raimberdievna – graduate student,
Turdaliev Eraly Rahmanalievich - graduate student,
Kalykul Kyzy Gulina - graduate student,
Osh Technological University

FUNDAMENTAL SOLUTION SOF VIBRATIONAL PROCESSES ANALOGUE OF THE FORMULA GAUSS AND GREEN

A method of generalized functions is developed for solving boundary problems for one class of stationary traveling solutions of the wave equation in N-dimensional cylindrical *domains. The cases of subsonic and supersonic motion of a source of disturbances are considered, which affects the type of equation, which becomes elliptic at subsonic speeds in a moving coordinate system, and hyperbolic at supersonic speeds. Using the theory of generalized functions, dynamical analogs of the Green and Gauss formulas in the space of generalized functions are obtained and their integral representations are given for different N.*

Key words: fundamental solutions, Gauss formula, Green formula, Boundary value problem, inhomogeneous functional differential equation, and Cauchy problem

Явления с движущимися нагрузками широко распространены на практике. К ним относятся разнообразные процессы, связанные с передвижением транспорта в различных средах, либо перемещением транспортируемых грузов в тоннелях и трубопроводах различного назначения. К данному классу задач можно отнести задачи дифракции сейсмических волн на протяженных подземных сооружениях.

При математическом моделировании таких процессов приходится строить решения краевых задач в классе бегущих функций, параметрических и автомодельных по ряду переменных. Параметр задачи – скорость движения источника возмущений в среде – существенно влияет на тип уравнений движения, который зависит от скоростей распространения волн в средах, так называемых звуковых скоростей. Их может быть несколько в зависимости от вида волн [2]. В идеальной акустической среде одна звуковая скорость (c), с которой распространяется волна движения, а в изотропной упругой среде их уже две (c_1, c_2): одна определяет скорость распространения волн объемной деформации, а второй – сдвиговой. В многокомпонентных средах звуковых скоростей становится больше. Тип дифференциальных уравнений, описывающих движения среды, меняется в зависимости от отношения скорости источника возмущений к звуковым скоростям. При этом приходится решать краевые задачи гиперболического и смешанного типов. Для их решения был разработан метод обобщенных функций (МОФ), который позволяет использовать универсальный подход к решению краевых задач во всем диапазоне скоростей бегущих решений.

Основные идеи метода обобщенных функций были изложены в [1] для решения начально – краевых задач для волнового уравнения в N – мерных пространствах, однако его можно использовать с успехом для решения уравнений любого типа.

Здесь этот метод используется для построения бегущих решений волнового уравнения при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях движения источника возмущений. Он включает в себя следующие этапы [3, 4]:

– постановка краевой задачи в пространстве обобщенных функций;

– построение динамических аналогов Грина в пространстве ОФ и их регулярных интегральных представлений;

– построение функции Грина и других фундаментальных решений волнового уравнения в классе бегущих функций;

– построение динамических аналогов формулы Гаусса для фундаментальных решений;

– построение граничных интегральных уравнений (ГИУ), определяющих решение задачи.

Постановка краевых задач. В области $D^- \in R^{N+1}$, ограниченной цилиндрической поверхностью D, образующая которая параллельна оси X_{N+1}, а направляющая $S-$гладкая замкнутая поверхность Ляпунова в R^N, рассматривается класс бегущих решений волнового уравнения

$$\Delta_{N+1} u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g(x, x_{n+1} + vt) = 0, \quad (1)$$

которое описывает волны, порождаемые источником, движущиеся вдоль оси цилиндра с постоянной скоростью $v, v>0,$ в направлении оси X_{N+1}. Здесь Δ_{N+1} – оператор Лапласа в $R^{N+1}, -\infty<t<+\infty,$ $\text{x}=(x_1 x_{n+1}), x=(x_1, x_2,...,x_N),$

$\| \text{ x } \| = \|(x, x_{N=1)}\| = \sqrt{\|x\|^2 + x_{N+1}^2}, \; \|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$

Предполагается, что

$u \to 0, \frac{\partial u}{\partial x_i} \to 0$ при $\|(x, x_{N+1})\| \to \infty, \forall t; i = \overline{1, N+1}$. (2)

Действие источника задается потенциалом $g(x,t)$, который описывается интегрируемой в D^- функцией $g(\text{x},)$:

$$g(x,z) \in L_1(D^-). \quad (3)$$

Если область D^- ограничена по x, задачу будем называть внутренней, в противном случае– внешней. Обозначим $S^- = \{x : (x, x_{N+1}) \in D^-\}$– сечение $D^-, n = (n(x), n_{N+1})$ – единичный вектор внешней нормали к D; $n_{N+1} = 0$, граница – цилиндрическая.

Перейдем в подвижную систему координат $x' = (x_1,...,x_N, z)$, где $z = x_{N+1} + vt.$ В новой системе функция $u(x,t)$ является решением уравнения:

$$\Delta_N u + (1 - M^2)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g(x,z) = 0, \quad (x,z) \in D^-, \quad (4)$$

где $M = v/c -$ число Маха. Обозначим $m = \sqrt{|1 - M^2|}$.

Рассмотрим две краевые задачи. Пусть на границе D заданы значения функции и или ее нормальной производной

$\frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}n_i\right).$

Краевая задача I: для $x \in S$

$u = u_D(x,z), u_D \in (D); u_D \to 0, \frac{\partial u}{\partial x_i} \to 0$ при $z \to +\infty.$ (5)

Краевая задача II: для $x \in S$

$\frac{\partial u}{\partial n} = p_D(x,z), \, p_D \in L_1(D).$ (6)

Требуется построить их решение. Легко видеть, что решение задач параметрическое по M. В зависимости от скорости движения источника возможны три случая: дозвуковой $(M>1)$ – эллиптический, звуковой $(M=1)$ – параболический, и сверхзвуковой $(M>1)$ – гиперболический, что определяет особенности и различия в построении решения для каждого из них. Рассмотрим в начале дозвуковой случай.

1. Обобщенное решение краевых задач придозвуковых скоростях (*M*<1).

При $M<1$ уравнение (4) эллиптическое:

$$\Delta_{\Delta u} + m^2 u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g(x,z) = 0, \quad (x,z) \in D^-. \quad (7)$$

Рассматриваемые задачи относятся к классу задач Дирихле (5), (7) либо Неймана (5), (6).

Единственность решений.

Теорема. Решение первой (второй) внутренней краевой задачи единственно, если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что

$$|u| \le Q\left(|z|^{-\varepsilon}\right), \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \le Q\left(|z|^{-1-\varepsilon}\right) \text{при} |z| \to \infty \text{ для } \forall x \in S + S^-, i = \overline{1, N+1}.$$

Доказательство. В силу линейности задачи достаточно доказать единственность нулевого решения однородной краевой задачи. Пусть $u(x,z)-$решение уравнения (7) при $g=0$, удовлетворяющее (5) при $u_D=0$ (или (6) при $u_p=0$) асимптотическим условиях теоремы. Умножая (7) на $\frac{\partial u}{\partial z_i}$ и интегрируя по конечному цилиндру

$C^- = D^- \bigcap \{(x,z): a<z<b\}$, где $a,b-$произвольные упорядоченные числа, получим

$$\int_{s^-} dV(x) \int_a^b \left\{0{,}5m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta_N u\right\} dz = 0. \quad (8)$$

Равенство удобно преобразовать, используя первую формулу Грина для второго слагаемого и интегрируя по z первое. Поскольку на торцах цилиндра нормаль имеет координаты $(0,\mp1)$, в результате получим:

$$\left(\frac{m^2}{2}+1\right)\int_{s^-}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x,b) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x,a)\right)dV(x) - \sum_{i=1}^{N}\int_{c^-}\frac{\partial u}{\partial z_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dV(x,z) + \int_{c}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial n}dS(x,z) = 0,$$

где $c-$ боковая поверхность цилиндра c^-. Здесь и далее dS, dV - дифференциалы площади поверхности и объема соответственна указанному множеству интегрирования. Последний поверхностный интеграл здесь равен нулю в силу граничных условий первой (второй) краевой задачи. Далее преобразуем второй интеграл этого равенства к виду

$$0{,}5\int_{c^-}\sum_{i=1}^{N}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial u}{\partial z}\right)dV(x,z) = 0{,}5\int_{s^-}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,b) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,a)\right)dV(x).$$

В результате выражение (8) приводится к виду:

$$\int_{s^-}\left[(0{,}5m^2+1)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x,b) + 0{,}5\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,b)\right]dV(x) =$$

$$= \int_{s^-}\left[(0{,}5m^2+1)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x,a) + 0{,}5\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,a)\right]dV(x).$$

Перейдем здесь к пределу по $b \to +\infty$. С учетом условий затухания на бесконечности получим

$$\int_{s^-}\left[(m^2+0{,}5)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x,a) + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,a)\right]dV(x) = 0. \quad (9)$$

Поскольку подынтегральная функция неотрицательна, необходимо, чтобы было $u = const$. В силу условий теоремы и произвольности «a» получаем $u=0$. Теорема доказана.

Пример. Найти решение модели

$$\left.\begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x,t < \infty, \\ \textit{при заданных граничных условиях} \\ u_{tt} - u_t + 3u_x + \dfrac{15}{4}u = 2\sin 5t, \quad x=0, \quad 0<t<\infty, \\ u(0,0)=0, \quad u_t(0,0)=3. \end{array}\right\} \quad (10)$$

Решение. Задача (10) приводит к задаче Коши для неоднородного функциональнодифференциального уравнения

$$\varphi''(z)+2\varphi'(z)+\frac{15}{4}\varphi(z)-2\varphi''(-z)-8\varphi'(-z)-\frac{15}{2}\varphi(-z)=2\sin 5z$$

при начальных условиях $\varphi(0)=0,\ \ \varphi'(0)=1$. Частными решениями однородного уравнения будут

$$\varphi_1(z)=e^{\frac{1}{2}\sqrt{5}z}+6.8544e^{-\frac{1}{2}\sqrt{5}z},\quad \varphi_2(z)=e^{\frac{3}{2}\sqrt{5}z}+6.8544e^{-\frac{3}{2}\sqrt{5}z}.$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет в виде

$$\Phi(z)=-0.021\cos 5z-0.0148\sin 5z.$$

Решая задачу Коши, получаем

$$\varphi(z)=0.086\left(e^{\frac{z}{2}\sqrt{5}}+6.8544e^{-\frac{z}{2}\sqrt{5}}\right)-0.0833\left(e^{\frac{3}{2}\sqrt{5}z}+6.8544e^{-\frac{3}{2}\sqrt{5}z}\right)-0.021\cos 5z-0.0148\sin 5z.$$

Решение исходной задачи (10) имеет вид

$$u(x,t)=0.086\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{5}(x+t)}+6.8544e^{-\frac{1}{2}\sqrt{5}(x+t)}\right)-0.0833\left(e^{\frac{3}{2}\sqrt{5}(x+t)}+6.8544e^{-\frac{3}{2}\sqrt{5}(x+t)}\right)-$$

$$-0.021\cos 5(x+t)-0.0148\sin 5(x+t)+0.1721\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{5}(x-t)}+6.8544e^{-\frac{1}{2}\sqrt{5}(x-t)}\right)-$$

$$-0.1668\left(e^{\frac{3}{2}\sqrt{5}(x-t)}+6.8544e^{-\frac{3}{2}\sqrt{5}(x-t)}\right)-0.0414\cos 5(x-t)+0.0297\sin 5(x-t).$$

График функции в системе Matlab выглядит следующим образом:

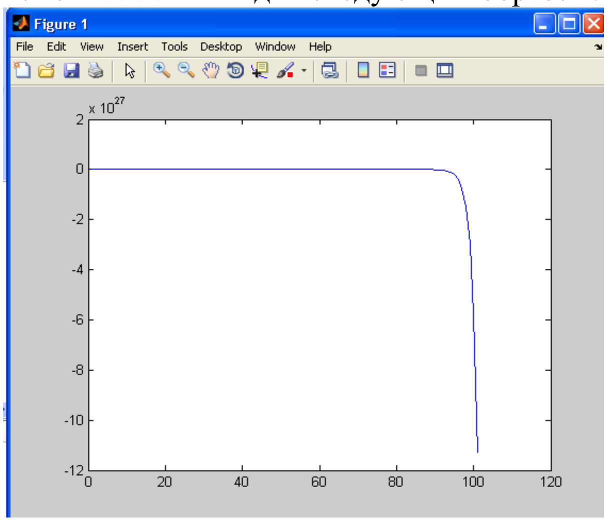

Рис. 1. График решения модельной задачи (10).

Вывод. Однако численная реализация этих ГИУ на основе метода граничных элементов вполне выполнима. Отметим, что использование разностных методов приращения краевых задач для гиперболических уравнений сталкивается с большими трудностями на фронтах ударных волн, где нет дифференцируемости решений, что делает невозможной запись этих уравнений на фронтах, положение которых в пространстве-времени также подлежит определению. Здесь эта проблема снимается, так как искомая функция $u(x,z)$ определяется через ее производные на границе области, часть из которых известна, а другая вычисляется при решении полученных здесь граничных интегральных уравнений. Для решения ГИУ удобно использовать метод конечных элементов.

Разработан способ решения более обшей гранично-начальной задачи о колебаниях полуограниченной струны методом функционально-дифференциальных уравнений. Приведен пример, в котором решение получено в явном виде и построена график в среде Matlab.

Литература:

1. **Самарский А.А.** Математическое моделирование. [Текст] / А.П. Михайлов // М. физмат, 2005г.
2. **Шаршеналиев Ж.Ш.** Смешанная задача о колебании полуограниченной прямой. [Текст] / А.Т. Турумбеков, Ж.Н. Кутунаев // Математический журнал. – Алматы, 2005, №4.
3. **Дженалиев М.Т.** Краевые задачи для нагруженных параболического и гиперболического уравнений с производными по времени в граничных условиях [Текст] / Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т.28, №4.– С.661 – 666.
4. **Сабитов К.Б.** Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения,-М. «Высшая школа», 2005г.
5. **Самойленко А.М.** Дифференциальные уравнения [Текст] / С.А. Кривошев // Киев, «Высшая школа» 1990г.
6. **Зарубин В.С.** Математическое моделирование в технике [Текст] М. Издательство МГТУ им. М.Э. Баумана, 2001г.