УДК 624.073.02

Маруфий Адилжан Таджимухамедович– д.т.н., профессор,
Рысбекова Элмира Сатаровна – к.т.н., доцент,
Ошский технологический университет

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ УСИЛИЙ И НЕПОЛНОГО КОНТАКТА С ОСНОВАНИЕМ В ВИДЕ ДВУХ ТРАНШЕЙ, РАСПОЛОЖЕННЫХ СИММЕТРИЧНО ОСИ Y

В статье рассматривается напряженно-деформированное состояние бесконечной плиты на упругом основании при одновременном учете влияния продольных усилий,приложенных в срединной плоскости плиты и неполного контакта с основанием в виде двух траншей, расположенных симметрично оси Y,получено точное аналитическое решениепоставленной задачи. Решение получено методом обобщенных решений с использованием интегральных преобразований Фурье.

Ключевые слова: изгиб, бесконечная плита, усилие, контакт, основание.

Адилжан Таджимухамедович Маруфий – т.и.д., профессор,
Элмира Сатаровна Рысбекова – т.и.к., доцент,
Ош технологиялык университети

УЗУНАН КЕТКЕН КҮЧТӨР ЭСКЕ АЛЫНГАН ТҮП-НЕГИЗИ МЕНЕН ТОЛУК ЭМЕС БАЙЛАНЫШТА БОЛГОН, ЭКИ ТРАНШЕЯ ТҮРҮНДӨ Y ОГУНА СИММЕТРИЯЛУУ ЖАЙГАШКАН, ЧЕКСИЗ ПЛИТАНЫН ЧЫМЫРКАНУУ-ДЕФОРМАЦИЯЛАНГАН АБАЛЫ

Макалада бир убакытта узунан кеткен күчтөрдүн таасири эске алынган, түп-негизи менен толук эмес байланышта болгон, эки траншея түрүндө Y огуна симметриялуу жайгашкан, чексиз плитанын чымыркануу-деформацияланган абалы каралган, коюлган маселенин аналитикалык так чечими чыгарылган. Маселени чыгаруу Фурьенин интегралдык кайра өзгөртүүсүн колдонуп, жалпыланган чечимдер ыкмасы менен аныкталган.

Негизги сөздөр: ийилүү, чексиз плита, күч, байланыш, негиз.

Marufiy Adilzhan Tadzhimuhamedovich–Doctor of technical Sciences, professor,
Rysbekova Elmira Satarovna–Ph.D., Associate professoror,
Osh technological university

THE STRESS-STRAIN STATE OF INFINITE PLATE ON AN ELASTIC FOUNDATION CONSIDERING THE INFLUENCE OF LONGITUDINAL FORCE AND INCOMPLETE CONTACT WITH THE GROUND IN TWO TRANCHES, ARRANGED SYMMETRICALLY AXIS Y

The article discusses the stress-strain state of an endless slab on an elastic foundation while simultaneously taking into account the influence of longitudinal forces applied in the middle plane of the slab and incomplete contact with the base in the form of two trenches located symmetrically with the Y axis, an exact analytical solution of the problem is obtained. The solution is obtained by the method of generalized solutions using Fourier integral transforms.

Key words: bending, endless plate, force, contact, base.

Введение. В практике проектирования фундаментов зданий и сооружений на просадочных грунтах в центральной части конструкций фундаментов может образоваться провал уже в процессе эксплуатации. Когда нагрузка и неполный контакт расположены в центре достаточно гибкой плиты и их размеры несоизмеримы, она может быть рассчитана по расчетной схеме бесконечной плиты.

Цель исследования. Получение точного аналитического решения напряженно-деформированного состояния бесконечной плиты на упругом основании при одновременном учете влияния продольных усилий,приложенных в срединной плоскости плиты и неполного контакта с основанием в виде двух траншей, расположенных симметрично оси Y.

Метод исследования. Решение получено методом обобщенных решений с использованием интегральных преобразований Фурье.

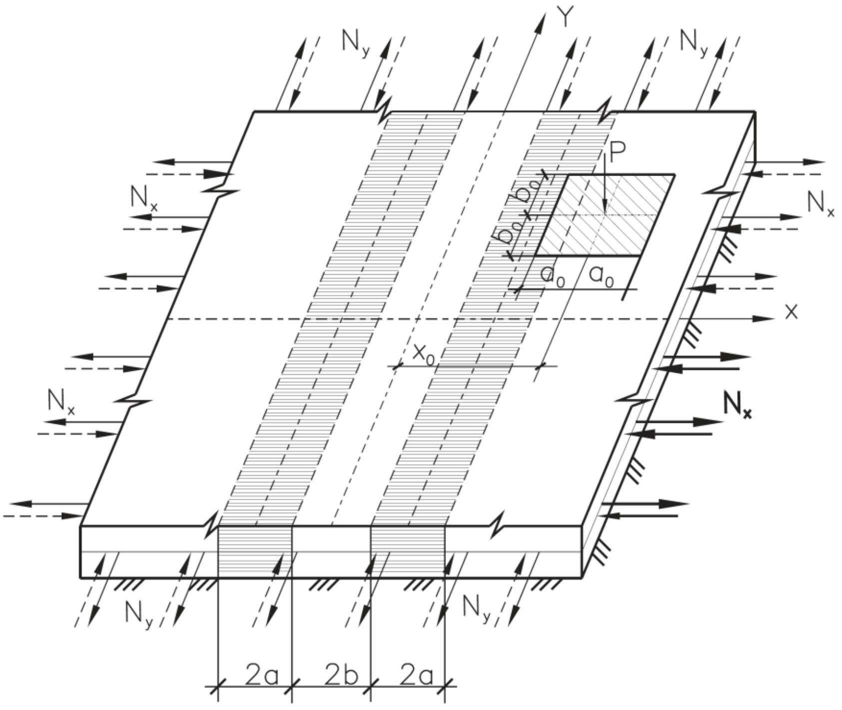
Рассмотрим плиту, лежащую на упругом основании и предположим, что нагрузка приложена в центре плитымежду двумя отверстиями, расположенными симметрично оси Y(Рис.1), каждая шириной 2a [1, 3, 5, 6].

В этом случае исходное дифференциальное уравнение изгиба плиты в безразмерных координатах и функциях имеет вид[4, 7]:

$$\nabla\nabla\omega(x,y)+\left[\theta(x-b-2a)+\theta(b-x)\right]\omega(x,y)-$$

$$-2\alpha_1\frac{\partial^2\omega(x,y)}{\partial x}-2\alpha_2\frac{\partial^2\omega(x,y)}{\partial y^2}=q_0(x,y) \qquad (1)$$

переход к безразмерным величинам [1, 2] нагрузка симметричная относительно обеих осей.



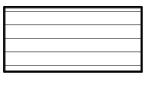
 - участок неполного контакта

Рис 1. Расчетная схема бесконечной плиты на упругом основании с учетом влияния продольных усилий, расположенных в срединной плоскости плиты и неполного контакта в виде двух траншей, расположенных симметрично оси Y.

Применив к выражению (1) двумерное прямое и обратное преобразование Фурье, получим следующее интегральное уравнение[1, 2]:

$$\omega(x,y)=\omega_{\infty}(x,y)+\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\cos\xi x\cdot\cos\eta y}{\left[(\xi^2+\eta^2)^2-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_1\eta^2+1\right]}\times$$
$$\times\int_b^{b+2a}\omega(t,\eta)\cos\xi t dt\cdot d\xi\cdot d\eta \qquad (2)$$

Выражение (2) можно записать в виде:

$$\omega(x,y)=\omega_{\infty}(x,y)+\frac{2}{\pi}\int_b^{b+2a}\omega(t,\eta)\int_0^{\infty}K(x,\eta,t)\cos\eta y\cdot d\eta\cdot dt \qquad (3)$$

Применим к этому уравнению интегральное преобразование Фурье по координате Y.

$$\omega(x,\eta)=\omega_{\infty}(x,\eta)+\int_b^{b+2a}\omega(t,\eta)K(x,\eta,t)dt \qquad (4)$$

Входящие в уравнение (4) выражение ядра правой части определяются формулами раздела [7], с учетом этого уравнение (4) может быть переписано для различных положений координаты*x*.Если *x*находится между отверстиями, т.е. $x\le b$, то уравнение(4) является уравнением с вырожденным ядром и его решение может быть записано в виде:

$$\omega(x,\eta)=\omega_{\infty}(x,\eta)+\int_b^{b+2a}\omega(t,\eta)K(x,\eta,t)dt=\omega_{\infty}(x,\eta)+$$
$$+\frac{\psi_1(\eta,x)}{\sqrt{\eta^4-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_2\eta^2+1}}\int_b^{b+2a}\omega(t,\eta)\varphi_3(\eta,t)dt+$$
$$+\frac{\psi_2(\eta,x)}{\sqrt{\eta^4-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_2\eta^2+1}}\int_b^{b+2a}\omega(t,\eta)\varphi_2(\eta,t)dt= \qquad (5)$$
$$=\omega_{\infty}(x,\eta)+C_1(\eta,b,a)\psi_1(\eta,x)+C_2(\eta,b,a)\psi_2(\eta,x)$$

где

$$C_i(\eta,b,a)=\frac{1}{\sqrt{\eta^4-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_2\eta^2+1}}\int_b^{b+2a}\omega(t,\eta)\varphi_i(\eta,t)dt;\ (i=1,2) \qquad (6)$$

Коэффициенты $C_i(\eta,b,a)$ вычисляются по формуле аналогичным в [7]. Для их определения умножим обе части на $\varphi_i(\eta,t)$ и интегрируем от *b*до *(b+2a).*

$$\left.\begin{aligned}C_1(\eta,b,a)&=\phi_1(\eta,a)+C_1(\eta,b,a)\phi_{11}(\eta,a)+C_2(\eta,b,a)\phi_{21}(\eta,a)\\C_2(\eta,b,a)&=\phi_2(\eta,a)+C_1(\eta,b,a)\phi_{12}(\eta,a)+C_2(\eta,b,a)\phi_{22}(\eta,a)\end{aligned}\right\}(7)$$

где

$$\phi_i(\eta,b,a)=\frac{1}{\sqrt{\eta^4-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_2\eta^2+1}}\int\limits_b^{b+2a}\omega_\infty(t,\eta)\varphi_i(\eta,t)dt; \qquad (8)$$

$(\mathrm{i}=1,2)$ (k=1,2)

$$\phi_{ik}(\eta,b,a)=\frac{1}{\sqrt{\eta^4-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_2\eta^2+1}}\int\limits_b^{b+2a}\psi_i(t,\eta)\varphi_k(\eta,t)dt; \qquad (9)$$

Решая систему (7), определим искомые коэффициенты

$$C_1(\eta,b,a)=\frac{O_1}{O} \qquad (10)$$

$$C_1(\eta,b,a)=\frac{O_2}{O} \qquad (11)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned}
&O=\left[1-\phi_{11}(\eta,b,a)\right]\left[1-\phi_{22}(\eta,b,a)\right]-\phi_{12}(\eta,b,a)\phi_{21}(\eta,b,a)\\
&O_1=\phi_{11}(\eta,b,a)\left[1-\phi_{22}(\eta,b,a)\right]+\phi_{21}(\eta,b,a)\phi_2(\eta,b,a)\\
&O_2=\phi_2(\eta,b,a)\left[1-\phi_{11}(\eta,b,a)\right]+\phi_{12}(\eta,b,a)\phi_1(\eta,b,a)
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Если рассматриваемая точка находится над одним из отверстий, т.е. $b\le x\le b+2a,$ то в этом случае

$$\omega(x,\eta)=\omega_\infty(x,\eta)+\int\limits_b^{b+2a}\omega(t,\eta)K(x,\eta,t)dt=\omega_\infty(x,\eta)+\frac{\varphi_1(\eta,x)}{\sqrt{\eta^4-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_2\eta^2+1}}\int\limits_b^x\omega(t,\eta)\psi_1(\eta,t)dt+$$

$$+\frac{\varphi_2(\eta,x)}{\sqrt{\eta^4-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_2\eta^2+1}}\int\limits_b^x\omega(t,\eta)\psi_2(\eta,t)dt+\frac{\psi_1(\eta,x)}{\sqrt{\eta^4-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_2\eta^2+1}}\times\int\limits_x^{b+2a}\omega(t,\eta)\varphi_1(\eta,t)dt+ \qquad (13)$$

$$+\frac{\psi_2(\eta,x)}{\sqrt{\eta^4-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_2\eta^2+1}}\int\limits_x^{b+2a}\omega(t,\eta)\varphi_2(\eta,t)dt;$$

И на этом участке необходимо применить численное интегрирование, сводя интегральное уравнение (13) к системе алгебраических уравнений при фиксированных значенияхx.

И наконец, если рассматриваемая точка находится в зоне контакта с основанием, т.е. $(b+2a)\le x$, интегральное уравнение(14) опять сводится к уравнению с вырожденным ядром и его решение имеет вид:

$$\omega(x,\eta)=\omega_\infty(x,\eta)+\int\limits_b^{b+2a}\omega(t,\eta)K(x,\eta,t)dt=\omega_\infty(x,\eta)+\frac{\psi_1(\eta,x)}{\sqrt{\eta^4-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_2\eta^2+1}}\times\int\limits_x^{b+2a}\omega(t,\eta)\varphi_1(\eta,t)dt+$$

$$+\frac{\varphi_1(x,\eta)}{\sqrt{\eta^4-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_2\eta^2+1}}\int\limits_b^{b+2a}\omega(t,\eta)\psi_1(\eta,\mathrm{t})dt+\frac{\varphi_2(\mathrm{x},\eta)}{\sqrt{\eta^4-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_2\eta^2+1}}\int\limits_b^{b+2a}\omega(\mathrm{t},\eta)\psi_2(\eta,\mathrm{t})dt=\omega_\infty(x,\eta)+ \qquad (14)$$

$$+C_3(\eta,b,a)\varphi_1(x,\eta)+C_4(\eta,b,a)\varphi_2(x,\eta)$$

где

$$C_i(\eta,b,a)=\frac{1}{\sqrt{\eta^4-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_2\eta^2+1}}\int\limits_b^{b+2a}\omega(t,\eta)\psi_{i-2}(\eta,t)dt; \quad (i=3,4)$$

Коэффициенты $C_i(\eta,b,a)$ определяются по формулам аналогичным в разделе 7 входящие в них функции $\phi_i(\eta,b,a)$ и $\phi_{ik}(\eta,b,a)$ определяются по формулам аналогичным 7с заменой только нижнего предела интегрирования на b, а верхнего на

$(b+2a)$. После определения трансформанты Фурье функции прогиба плиты по формулам (5 и 13) истинные значения прогибов определяются из обратного преобразования Фурье

$$\omega(x,y)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty \omega(x,\eta)\cos\eta y d\eta \quad (15)$$

Продифференцировав выражение (2.2), получим выражения изгибающих моментов и приведенных поперечных сил:

$$\begin{cases} M_x(x,y)=M_{\infty x}(x,y)-\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(\xi^2+\nu\eta^2)\cos\xi x\cdot\cos\eta y}{\left[(\xi^2+\eta^2)^2-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_1\eta^2+1\right]}\cdot\int_b^{b+2a}\omega(t,\eta)\cos\xi t dt\cdot d\xi\cdot d\eta; \\ M_y(x,y)=M_{\infty y}(x,y)-\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(\eta^2+\nu\xi^2)\cos\xi x\cdot\cos\eta y}{\left[(\xi^2+\eta^2)^2-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_1\eta^2+1\right]}\cdot\int_b^{b+2a}\omega(t,\eta)\cos\xi t dt\cdot d\xi\cdot d\eta; \\ Q_x(x,y)=Q_{\infty x}(x,y)+\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\left[\xi^3+(2-\nu)\xi\eta^2\right]\cos\xi x\cdot\cos\eta y}{\left[(\xi^2+\eta^2)^2-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_1\eta^2+1\right]}\cdot\int_b^{b+2a}\omega(t,\eta)\cos\xi t dt\cdot d\xi\cdot d\eta; \\ Q_y(x,y)=Q_{\infty y}(x,y)\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\left[\eta^3+(2-\nu)\xi^2\eta\right]\cos\xi x\cdot\cos\eta y}{\left[(\xi^2+\eta^2)^2-2\alpha_1\xi^2-2\alpha_1\eta^2+1\right]}\cdot\int_b^{b+2a}\omega(t,\eta)\cos\xi t dt\cdot d\xi\cdot d\eta; \end{cases} \quad (16)$$

Вывод. Таким образом получено точное аналитическое решение напряженно-деформированного состояния бесконечной плиты, лежащей на винклеровском упругом основании с учетом влияния продольных усилий и неполного контакта с основанием в виде двух траншей, расположенных симметрично оси Y.

Литература:

1. **Маруфий А.Т**. Расчёт плит на упругом при отсутствии основания под частью плиты // [Текст] Научный журнал “Основания, фундаменты и механика грунтов.’’– М.: 1999; №4.– с.27-31.
2. **Маруфий А.Т.** Изгиб бесконечной плиты на упругом основании с неполным контактом с основанием [Текст] Травуш В.И. // Научный вестник ФерГУ, 1995; №1-2.– с.71-77.
3. **Маруфий А.Т.** Изгиб полубесконечной плиты , лежащей на упругом основании Винклера, с учетом влияния продольных усилий. [Текст] /А.Т. Турганбаев // Научный вестник ФерГУ, 1996, №1, – с.70-73.
4. **Травуш В.И.** Об одном методе решения задач изгиба конструкций, лежащих на винклеровском основании. [Текст] Сб. трудов “Вопросы архитектуры и строительства зданий для зрелищ, спорта и учреждений культуры ”, М.,1976, №4, – с.83-89.
5. **Градштейн И.С.** Таблицы интеграллов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И.И. Рыжик // М.: Физматгиз, 1962.– 1108с.
6. **Маруфий А.Т.** Изгиб бесконечной плиты, лежащей на винклеровском упругом основании с учетом влияния продольных усилий и неполного контакта с основанием [Текст] / Э.С. Рысбекова // Вестник КГУСТА, 2015; №2. – с. 66-70.