УДК 624.012.35

Эргешов Эмилбек Сатимбекович – магистрант,
Абдуллаев Улан Душабаевич – магистр,
Ошский технологический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

В данной статье рассматривается, способы определения значении критической силы стержня с шарнирно закрепленными концами и получено выражение критической силы. Выведена формула Эйлера, которая основан на использовании дифференциального уравнения изогнутой оси стержня, материал которого следует закону Гука и применима только к упругим стержням, теряющие устойчивость за пределом упругости (пропорциональности) материала.

Ключевые слова: продольный изгиб, критическая сила, предельная гибкость, пластическая деформация.

Ergeshov Emilbek Satimbekovich – graduate student,
Abdullaev Ulan Dushabaevich – master student,
Osh technological university

INVESTIGATION OF THE LOSS OF STABILITY OF COMPRESSED RODS BEYOND THE ELASTIC LIMIT

In this paper, we consider methods for determining the value of the critical force of a rod with articulated ends and an expression of the critical force is obtained. The Euler formula is derived, which is based on the use of the differential equation of the curved axis of the rod, the material of which follows Hooke's law and is applicable only to elastic rods that lose stability beyond the elasticity (proportionality) of the material.

Key words: buckling, critical force, the extreme flexibility of the plastic deformation.

Основы расчета сжатых стержней строительной механики были созданы лишь в XIX в. в связи с появлением железных дорог и строительством мостов и крупных гидротехнических и промышленных сооружении.

Первые большие достижения строительной механики связаны с деятельностью русских инженеров-мостовиков, строителей первой железной дороги Петербург - Москва.

Среди работ многих советских ученых можно указать на труды академика А.Н.Крылова (1863—1945 гг.) по строительной механике корабля, теории продольного изгиба, теории вынужденных колебаний и расчету балки на упругом основании,

Можно указать и работы следующих русских ученых: профессора Д.И.Журавского (1821—1891 гг.), автора первой теории раскосных ферм; профессора Ф.С.Ясинского (1856—1899 гг.), предложившего первые решения по различным задачам устойчивости стержней, профессора Н.В.Корноухова, разработавшего теорию устойчивости каркасных рам (в особенности метод перемещений); профессора А.А.Гвоздева, разработавшего смешанный метод расчета рам и развившего теорию расчета сооружений по предельному состоянию; профессора К.С. Завриева, впервые предложившего метод расчета сжато-изогнутых стержней по предельным состояниям и профессора А.С.Смирнова, разработавшего матричную форму решения различных задач статики, устойчивости и динамики сооружений. большую роль в решении различных задач строительной механики сыграли также В.В.Новожилов, П.Ф.

Папкович, Н.И.Безухов, В.В.Болотин, А.А.Уманский, А.П.Синицын, Д.В. Вайнберг, В.А.Киселев, А.Р. Ржаницын, Г.К.Клейн, А.П.Филин и многие другие.

Из зарубежных ученых, внесших свой вклад в развитие строительной механики в XIX в., следует назвать Даламбера, Лагранжа, Кулона, Навье, Ламе, Сен-венана, Эйлера, Максвелла, Мора и других.

Изучение сжатых колонн и в настоящее время является актуальным и представляет практический интерес при проектировании многоэтажного каркаса здания.

Изгиб, связанный с потерей устойчивости прямолинейной формы равновесия, называется продольным, так как его вызывает продольная нагрузка. Наибольшее значение осевой сжимающей силы, до которого сохраняется устойчивость прямолинейной формы равновесия стержня, т. е. невозможен продольный изгиб, называется критическим [1-6]. Рассмотрим значении критической силы стержня с шарнирно закрепленными концами (рис.1,а).

Критическая сила не вызывает напряжений, превышающих предел пропорциональности, при малых перемещениях можно воспользоваться приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки:

$y''(z) = \frac{M(z)}{EJ}$.

Абсолютное значение изгибающего момента в произвольном сечении (рис.1, б) M(z) = Fy. Тогда

$$y''(z) = \frac{-Fy}{EJ}$$

Знак минус в правой части поставлен по той причине, что прогиб и вторая производная разнозначны независимо от выбора положительного направления оси y. Вводя обозначение $k^2 = \frac{F}{EJ}$ получаем однородное дифференциальное уравнение y" + k2y = 0. (1а)

Его решение, как известно из математики, имеет вид *y = Csinkz + Dcoskz (1б)* в справедливости которого нетрудно убедиться, если подставить в исходное уравнение выражения ***y*** и ***y"***. Постоянные интегрирования C и ***D*** определяются из граничных условий. При **x** = 0 ***y*** = 0, т. е. 0 = CsinO + DcosO = D, (1в) и, таким образом, уравнение (1б) упрощается: *y = Csxnkz. (1г)*

Из второго граничного условия (при ***z=l, y***=0) имеем Csinkl = 0.

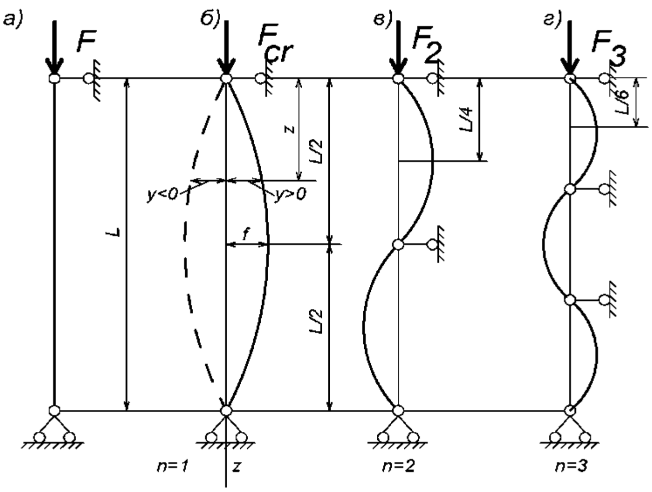

Рис. 1. Значения критических сил в стержнях.

Если C=0, то получаем тривиальное решение **y**=0, которое не представляет интереса, поскольку соответствует первоначальному, неискривленному положению стержня. Остается положить, что sinkl=0. Это уравнение имеет бесчисленное множество корней: **kl** = 0, π,2π,**пπ**, где **п** — произвольное целое число. Отсюда k = nπ/l; k2 = п2π2/l2.

Согласно обозначению (1а) п2π2/12 = F/(EJ) **и** F = n2π2EJ/l2.

Изменяя число **п** получим последовательный ряд значений силы **F**, которым соответствуют различные искривленные формы равновесия стержня. Однако определению подлежит такое значение сжимающей силы, при котором наряду с исходной прямолинейной формой равновесия может существовать смежная криволинейная. Таким образом, следует принять наименьшее значение **п.** Случай, когда **п** = 0, лишен смысла, так как при этом **F** = 0. Принимая **п** = 1 и имея в виду, что продольный изгиб произойдет в плоскости наименьшей жесткости получаем выражение критической силы $F_{cr} = \pi^2 EJ_{min}/l^2$ (2)

Формула подобного вида впервые выведена Л. Эйлером и носит его имя [6]. Возвращаясь к уравнению (1в), имеем $y = \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)z$, т. е. изогнутая ось стержня представляет собой синусоиду, имеющую n полуволн. Критической силе соответствует синусоида с одной полуволной (п=l, см. рис.1, б):$y = C\sin(\frac{\pi z}{l}) = f\sin(\frac{\pi z}{l})$ где f — стрела прогиба.

При n = 2, 3, ..., m искривленные формы равновесия имеют вид синусоиды с 2, 3, ..., m полуволнами в пределах длины стержня (рис. 1, в). Эти формы неустойчивы, но могут быть реализованы, если перейти к другой системе, подкрепив стержень шарнирными опорами в точках перегиба синусоиды. Тогда сила F будет в 4,9, ...,m2 раз превышать критическое значение.

Соответствующие значения критической силы объединяет формула

$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l_{ef}^2} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2}$ (3)

где $l_{ef} = \mu l$ - приведенная или расчетная (эффективная) длина стержня; μ — коэффициент приведения, зависящий от способа закрепления его концов; l - фактическая длина.

Приведенная длина — это та условная длина стержня, которая позволяет свести любой случай закрепления его концов к основной расчетной схеме (первая схема в таблице) [3]. Так, например, критическая сила стержня с одним защемленным и другим свободным концом (вторая схема) имеет такое же значение, как у стержня с шарнирным закреплением обоих концов, но вдвое большей длины. Отсюда можно заключить, что коэффициент есть величина, обратная числу п полуволн синусоиды, умещающихся в пределах фактической длины стержня, потерявшего устойчивость.

Значение напряжений, вызываемых в стержне критической силой, также называется критическим:

$$\sigma_{cr} = N/A = F_{cr}/A = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l_{ef}^2 A} = \frac{\pi^2 Ei_{min}}{l_{ef}^2}$$

Здесь A - площадь поперечного сечения стержня брутто (без учета местных ослаблений); i_{min}- минимальный главный центральный радиус инерции.

Следуя Ф. С. Ясинскому [6], введем обозначение

$\lambda = \frac{l_{ef}}{i_{min}} = \frac{\mu l}{i_{min}}$. (4)

где λ — гибкость стержня безразмерная геометрическая характеристика, определяемая способом закрепления его концов, длиной, а также формой и размерами поперечного сечения.

Тогда выражение критического напряжения принимает следующий окончательный вид:

$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ (5)

Эта функциональная зависимость представляет собой видоизмененную формулу Эйлера и графически изображается **гиперболой** (рис.2). При гибкостях, близких к нулю, критическое значение напряжений должно, казалось бы, стремиться к бесконечности. Однако вывод формулы Эйлера основан на использовании дифференциального уравнения изогнутой оси стержня, материал которого следует закону Гука. Поэтому формула Эйлера справедлива лишь при постоянном модуле упругости Е, т. е. при условии, что критическое напряжение не превышает предела пропорциональности:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{pr}$$

Отсюда предельная гибкость, отвечающая равенству $\sigma_{cr} = \sigma_{pr}$:

$\lambda_{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\pi}\sqrt{\mathbf{E}/\sigma_{pr}}$ (6)

Она зависит исключительно от механических свойств материала и имеет постоянное значение.

Таким образом, формула Эйлера применима только к упругим стержням. Распространение ее на стержни, теряющие устойчивость в стадии упругопластического состояния является практически опасным, поскольку в этом случае получаются завышенные значения критического напряжения (штриховая линия на указанном рисунке), а следовательно, критической силы и запредельное состояние не отвечает из-за необратимых процессов деформации.

При потере устойчивости за пределом упругости критические напряжения определяют по более сложным формулам, учитывающим развитие прогрессирующих пластических деформаций, или по эмпирическим зависимостям, одна из которых выражается формулой Тетмайера — Ясинского

$\sigma_{cr} = a - b\boldsymbol{\lambda}$ (7)

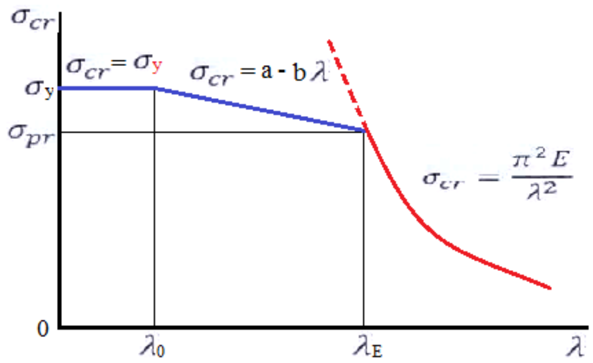

Рис. 2. Графическая зависимость формулы Эйлера

где a и b — **экспериментально установленные** параметры, не имеющие физического смысла и зависящие от материала. Для стали марки Ст3 a=305 МПа, b=1,12 МПа; для дюралюминия a = 400 МПа, b= 2,78 МПа; для древесины сосны и ели a = 28,7 МПа, b= 0,19 МПа.

Соответствующая критическая сила $F_{cr} = \sigma_{cr}A$ (8) Зависимость (8) носит линейный характер. Получаемые с ее помощью результаты предоставляют практический интерес также до некоторого предела, характеризуемого гибкостью, $\boldsymbol{\lambda_0}$ при которой критическое напряжение становится равным значению опасных напряжений сжатия: пределу текучести σ_y — для пластичных материалов (см. рис. 2) и пределу прочности σ_u — для хрупких.

Выводы. Как видно, сжатые стержни можно отнести к трем категориям:

1. стержни большой гибкости ($\boldsymbol{\lambda \geq \lambda_E}$), для которых справедлива формула Эйлера;

2. стержни средней гибкости ($\boldsymbol{\lambda_0} < \lambda \leq \lambda$), которые рассчитывают по формуле Тетмайера — Ясинского;

3. стержни малой гибкости ($\boldsymbol{\lambda} < \lambda_0$), имеющие постоянное значение критического напряжения: $\sigma_{cr} = \sigma_y$ или $\sigma_{cr} = \sigma_u$. Для них опасна потеря прочности, а не устойчивости.

Литература:

1. **Вайнберг, Д.В.** Пластины, диски, балки-стенки. [Текст] / Е.Д. Вайнберг // Госстройиздат, УССР, Киев, 1952.
2. **Дарков, А.В.** Строительная механика. [Текст] / В.И. Кузнецов // Изд. «Высшая школа», 1962.
3. **Киселев, В. А.** Строительная механика. [Текст] Госстройиздат, 1960.
4. **Рабинович, И.М.** Курсы строительной механики. [Текст] Госстройиздат, ч. I и ч. II, 1960.
5. **Смирнов, А.Ф.** Статическая и динамическая устойчивость сооружений. [Текст] М., Транс- желдор издат, 1947.
6. **Смирнов, А.Ф.** Расчет сооружений с применением вычислительных машин. [Текст] / А.В. Александров, Н.Н. Шапошников, Б.Я. Лащенников // М. - Издательство литературы по строительству, 1964.
7. **Снитко, Н.К.** Устойчивость стержневых систем в упруго-пластической области. [Текст] Госстройиздат, 1968.