УДК 517.927

Ж. А. Зулпукаров – к.ф.-м.н., доцент,
Ошский технологический университет,
Ж.А. Алиева - преподаватель,
Ошский гуманитарно-педагогический университет,
Назарали кызы А. - магистрант

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В данной работе рассматриваются краевая задача для вырождающегося уравнения второго порядка с тремя независимыми переменными. Для этой задачи методом неотрицательных квадратичных форм доказано теоремы единственности решение вырождающегося дифференциальных уравнения в частных производных второго порядка с тремя независимыми переменными.

Ключевые слова: Вырожденные дифференциальные уравнения, в частных производных, уравнения, интегрирования по частям, краевые задачи, теорема единственности.

Zh. A. Zulpukarov - Ph.D., Associate professor,
Osh technological university,
J.A. Aliyeva - lecturer,
Osh humanitarian pedagogical institute
Nazarali kyzy A. - graduate student

EDINSTVENNOSTI DECISION DEGENERATING DIFFERENTIAL EQUATION IN QUOTIENT OF THE DERIVED SECOND ORDER WITH THREE INDEPENDENT VARIABLE

In this paper we consider a boundary value problem for a degenerate second-order equation with three independent variables. For this problem, the uniqueness theorem proves the solution of a degenerate second-order partial differential equation with three independent variables by the method of non-negative quadratic forms.

Key words: Degenerate partial differential equations, equations, integration by parts, boundary value problems, uniqueness theorem.

Рассмотрим следующие уравнения

$a_1(t,x,y)u_{tx} + a_2(t,x,y)u_{ty} + a_3(t,x,y)u_{xy} + b_1(t,x,y)u_t + b_2(t,x,y)u_x +$
$+ b_3(t,x,y)u_y + c(t,x,y)u = f(t,x,y)$, (1) с краевыми условиями $u(0,x,y)=0$, $(x,y)\in[0,X]\times[0,Y]$, $u(t,0,y)=0$, $(t,y)\in[0,T]\times[0,Y]$, (2) $u(t,x,0)=0$, $(t,x)\in[0,T]\times[0,X]$, где $a_1(t,x,y), a_2(t,x,y), a_2(t,x,y), b_1(t,x,y), b_2(t,x,y), b_3(t,x,y), c(t,x,y)$ и $f(t,x,y)$ – заданные функции, а $u(t,x,y)$ – неизвестная функция в области $G = \{(t,x,y) : 0 \le t \le T, 0 \le x \le X, 0 \le t \le Y\}$.

Обозначим через $Z_2(G)$ – пространство функций $u(t,x,y)$, таких что $u(t,x,y), u_t(t,x,y), u_x(t,x,y), u_y(t,x,y), u_{tx}(t,x,y), u_{xy}(t,x,y), u_{ty}(t,x,y), u_{txy}(t,x,y) \in L_2(G)$.

Различные вопросы для вырождающихся скалярных и систем обыкновенных дифференциальных уравнений исследовались в [2, 4-6]. Вырождающиеся дифференциальные уравнения в частных производных с двумя независимыми переменными изучено в [1]. Краевая задача (1)-(2) является некорректным [3]. В данной работе методом неотрицательных квадратичных форм доказано теорема единственности решение вырождающегося дифференциальных уравнения в частных производных второго порядка с тремя независимыми переменными.

Предполагаем выполнение условий:

а) функции $a_i(t,x,y), a'_{it}(t,x,y), a'_{ix}(t,x,y), a'_{iy}(t,x,y), b_i(t,x,y),\ b'_{itx}(t,x,y), b'_{ity}(t,x,y),$ $b'_{ixy}(t,x,y), c(t,x,y), c'''_{txy}(t,x,y)-$непрерывные функции в области G, (i=*1,2,3*);

б) главные миноры матричной функции $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$

неотрицательны при всех

$(t,x,y,s,z,w)\in G_1=\{(t,x,y,s,z,w):0\le s\le t\le T, 0\le z\le x\le X, 0\le w\le y\le Y\}$,

где $a_{11}=(t-s)(x-z)[a_1(s,z,w)-(y-w)a'_{1w}(s,z,w)]$,

$a_{22}=(t-s)(y-w)[a_2(s,z,w)-(x-z)a'_{2z}(s,z,w)]$,

$a_{33}=(x-z)(y-w)[a_3(s,z,w)-(t-s)a'_{3s}(s,z,w)], a_{12}=a_{21}=-(t-s)(x-z)(y-w)b_1(s,z,w)$,

$a_{13}=a_{31}=-(t-s)(x-z)(y-w)b_2(s,z,w)$, $a_{32}=a_{23}=-(t-s)(x-z)(y-w)b_3(s,z,w)$;

в) главные миноры матричной функции $B=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33}\end{pmatrix}$

неотрицательны при всех $(t,x,y,s,z,w)\in G_1$, где

$b_{11}=(t-s)[b_1(s,z,w)-(x-z)b'_{1s}(s,z,w)-(y-w)b'_{1w}(s,z,w)+(x-z)(y-w)b''_{1zw}(s,z,w)]$

$b_{22}=(x-z)[b_2(s,z,w)-(t-s)b'_{2s}(s,z,w)-(y-w)b'_{2w}(s,z,w)+(y-w)(t-s)b''_{2sw}(s,z,w)]$

$b_{33}=(y-w)[b_3(s,z,w)-(t-s)b'_{3s}(s,z,w)-(x-z)b'_{3z}(s,z,w)+(x-z)(t-s)b''_{3sz}(s,z,w)]$

$b_{12}=b_{21}=-\dfrac{1}{2}(t-s)(x-z)[c(s,z,w)-(y-w)c'_w(s,z,w)]$,

$b_{13}=b_{31}=-\dfrac{1}{2}(t-s)(y-w)[c(s,z,w)-(x-z)c'_z(s,z,w)]$

$b_{23}=b_{32}=-\dfrac{1}{2}(x-z)(y-w)[c(s,z,w)-(t-s)c'_s(s,z,w)]$;

г) $c(s,z,w)-(t-s)c'_s(s,z,w)-(x-z)c'_z(s,z,w)-(y-w)c'_w(s,z,w)+(t-s)(y-w)\times$ $\times c''_{sw}(s,z,w)+(t-s)(x-z)c''_{sz}(s,z,w)+(x-z)(y-w)c''_{zw}(s,z,w)-$ $-(t-s)(x-z)(y-w)c'''_{szw}(s,z,w)\ge K>0$, где $0<K-$ некоторая постоянная.

Теорема. Пусть выполняются условия *а) – г)*. Тогда решение $u(t,x,y)$ краевой задачи (1)-(2) единственно в классе $Z_2(G)$. Доказательство. Сделаем следующую подстановку

$$u(t,x,y)=\int_0^t\int_0^x\int_0^y \vartheta(s,z,w)dwdzds.\ (t,x,y)\in G\quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), имеем

$$a_1(t,x,y)\int_0^y \vartheta(t,x,w)dw + a_2(t,x,y)\int_0^x \vartheta(t,z,y)dz + a_3(t,x,y)\int_0^t \vartheta(s,x,y)ds +$$

$$+b_1(t,x,y)\int_0^x\int_0^y \vartheta(t,z,w)dwdz + b_2(t,x,y)\int_0^t\int_0^y \vartheta(s,x,w)dwds +$$

$$+b_3(t,x,y)\int_0^t\int_0^x \vartheta(s,z,y)dzds + c(t,x,y)\int_0^t\int_0^x\int_0^y \vartheta(s,z,w)dwdzds = f(t,x,y)\,. \quad (4)$$

Обе части уравнения (4) умножив на $\vartheta(t,x,y)$, дважды интегрируя по частям в области $G_{txy} = \{(s,z,w):\ 0 \le s \le t,\ 0 \le z \le x,\ 0 \le w \le y\}$ и применяя, формулу Дирихле, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y \{(t-s)(x-z)[a_1(s,z,w)-(y-w)a'_{1w}(s,z,w)]\left(\int_0^w \vartheta(s,z,\eta)d\eta\right)^2 + (t-s)(y-w)\times$$

$$\times[a_2(s,z,w)-(x-z)a'_{2z}(s,z,w)]\left(\int_0^z \vartheta(s,\xi,w)d\xi\right)^2 + (x-z)(y-w)[a_3(s,z,w)-$$

$$-(t-s)a'_{3s}(s,z,w)]\left(\int_0^s \vartheta(\tau,z,w)d\tau\right)^2 - 2(t-s)(x-z)(y-w)[b_1(s,z,w)\left(\int_0^w \vartheta(s,z,\eta)d\eta\right)\times$$

$$\times\left(\int_0^z \vartheta(s,\xi,w)d\xi\right) + b_2(s,z,w)\left(\int_0^w \vartheta(s,z,\eta)d\eta\right)\left(\int_0^s \vartheta(\tau,z,w)d\tau\right) + b_3(s,z,w)\left(\int_0^z \vartheta(s,\xi,w)d\xi\right)\times$$

$$\times\left(\int_0^s \vartheta(\tau,z,w)d\tau\right)]\}dwdzds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y \{(t-s)[b_1(s,z,w)-(x-z)b'_{1z}(s,z,w)-$$

$$-(y-w)b'_{1w}(s,z,w)+(x-z)(y-w)b''_{1zw}(s,z,w)]\left(\int_0^z\int_0^w \vartheta(s,\xi,\eta)d\eta d\xi\right)^2 +$$

$$+(x-z)[b_2(s,z,w)-(t-s)b'_{2s}(s,z,w)-(y-w)b'_{2w}(s,z,w)+(t-s)(y-w)b''_{2sw}(s,z,w)]\times$$

$$\times\left(\int_0^s\int_0^w \vartheta(\tau,z,\eta)d\eta d\tau\right)^2 + (y-w)[b_3(s,z,w)-(t-s)b'_{3s}(s,z,w)-(x-z)b'_{3z}(s,z,w)+$$

$$+(t-s)(x-z)b''_{3sz}(s,z,w)]\left(\int_0^s\int_0^z \vartheta(\tau,\xi,w)d\xi d\tau\right)^2 - (t-s)(x-z)[c(s,z,w)-$$

$$-(y-w)c'_w(s,z,w)]\left(\int_0^z\int_0^w \vartheta(s,\xi,\eta)d\xi d\eta\right)\left(\int_0^s\int_0^w \vartheta(\tau,z,\eta)d\eta d\tau\right) - (t-s)(y-w)\times$$

$$\times[c(s,z,w)-(x-z)c'_z(s,z,w)]\left(\int_0^z\int_0^w \vartheta(s,\xi,\eta)d\eta d\xi\right)\left(\int_0^s\int_0^z \vartheta(\tau,\xi,w)d\xi d\tau\right) - (x-z)\times$$

$$\times(y-w)[c(s,z,w)-(t-s)c'_s(s,z,w)]\left(\int_0^s\int_0^w \vartheta(\tau,z,\eta)d\eta d\tau\right)\left(\int_0^s\int_0^z \vartheta(\tau,\xi,w)d\xi d\tau\right)\}dwdzds +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y [c(s,z,w)-(y-w)c'_w(s,z,w)-(x-z)c'_z(s,z,w)-(t-s)c'_s(s,z,w)+$$

$$+(t-s)(y-w)c''_{sw}(s,z,w)+(x-z)(y-w)c''_{zw}(s,z,w)+(t-s)(x-z)c''_{sz}(s,z,w)-$$

$$-(y-w)(x-z)(t-s)c'''_{szw}(s,z,w)]\left(\int_0^s\int_0^z\int_0^w \vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau\right)^2\}dwdzds=$$

$$=\int_0^t\int_0^x\int_0^y\left\{\int_0^s\int_0^z\int_0^w f(\tau,\xi,\eta)\vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau\right\}dwdzds. \quad (5)$$

В силу условий *а) – г)* левая часть соотношения (5) неотрицательна, поэтому отсюда вытекает следующее неравенство

$$\frac{K}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\left(\int_0^s\int_0^z\int_0^w \vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau\right)^2 dwdzds \le \left|\int_0^t\int_0^x\int_0^y\int_0^s\int_0^z\int_0^w f(\tau,\xi,\eta)\vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau dwdzds\right|.$$

Пусть $f(t,x,y)=0$, для любых $(t,x,y)\in G$. В силу условий *а) - г)* и теоремы Сильвестра, получим, $\int_0^s\int_0^z\int_0^w \vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau=0$ т.е. $\vartheta(t,x,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G$. Теорема доказана. Пример. Рассмотрим уравнение

$$(1-y)u_{tx}+(1-x)u_{ty}+(1-t)u_{xy}+u_t+u_x+u_y+u=f(t,x,y)$$

с краевыми условиями $u(0,x,y)=0$, $(x,y)\in[0;1]\times[0;1]$, $u(t,0,y)=0$, $(t,y)\in[0;1]\times[0;1]$, $u(t,x,0)=0$, $(t,x)\in[0;1]\times[0;1]$. Выполняется все условия *а)-г)* где $c(s,z,w)=1$, $0<K=1$. Так как в условия б) и в) элементы матрицы

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix},\ B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{12} & b_{22} & b_{23}\\ b_{13} & b_{23} & b_{33}\end{pmatrix}$$

определяются по следующему формулу

$a_{11}=(t-s)(x-z)(1+y-2w)$, $a_{22}=(t-s)(y-w)(1+x-2z)$, $a_{33}=(x-z)(y-w)(1+t-2s)$,

$a_{12}=a_{21}=-(t-s)(x-z)(y-w)$, $a_{13}=a_{31}=-(t-s)(x-z)(y-w)$,

$a_{32}=a_{23}=-(t-s)(x-z)(y-w)$. $b_{11}=(t-s)$, $b_{22}=(x-z)$, $b_{33}=(y-w)$,

$b_{12}=b_{21}=-\frac{1}{2}(t-s)(x-z)$, $b_{13}=b_{31}=-\frac{1}{2}(t-s)(y-w)$, $b_{23}=b_{32}=-\frac{1}{2}(x-z)(y-w)$.

Здесь $\det A=(t-s)^2(x-z)^2(y-w)^2\{[\frac{1}{4}(1+y-2w)(1+x-2z)(1+t-2s)-$

$$-2(t-s)(x-z)(y-w)]+[\frac{1}{4}(1+y-2w)(1+x-2z)(1+t-s)-$$

$$-(t-s)(y-w)(1+x-2z)]+[\frac{1}{4}(1+y-2w)(1+t-2s)-(x-z)(y-w)(1+t-2s)]+$$

$$+[\frac{1}{4}(1+y-2w)(1+t-2s)-(t-s)(x-z)(1+y-2w)]\}\ge 0.$$

$$\det B=(t-s)^2(x-z)^2(y-w)^2\{[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(t-s)(y-w)(x-z)]+$$

$$+[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(t-s)(y-w)]+[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(t-s)(x-z)]+[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(x-z)(y-w)]\}\ge 0.$$

Литература:

1. **Бицадзе, А.В.** Уравнения математической физике [Текст] – М.: Наука, 1982.
2. **Бояринцев, Ю.Е**. Метод решение обыкновенных дифференциальных уравнений – Новосибирск Наука 1988.

3. **Лаврентьев, М.М**. Некорректные задачи математической физики и анализа [Текст] / В.Г. Романов, С.П. Шишатский //–М: Наука 1980.
4. **Чистяков, В.Ф.** Избранные главы алгебро-дифференциальных систем [Текст] / А. А. Щеглова // – Новосибирск 2003.
5. **Шлапак, Ю.Д.** О приводимости линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных // [Текст] Мат. Физика 1997. Выпуск 21.-С. 60-64.
6. **Щеглова, А.А.** Исследование и решение вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью замен переменных // [Текст] Сиб. мат. жур. – 1995 – Т. 36 №6 -С. 1436 - 1445.