УДК 517.968

Аширбаева Айжаркын Жоробековна - д.ф.-м.н., профессор,
Мухамбеткабыл кызы Токтобу – магистрант,
Ошский технологический университет

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Новым способом, с помощью метода дополнительного аргумента начальная задача для уравнения колебаний сведена к системе интегральных уравнений.

Ключевые слова: Аргумент, интегральная уравнения, уровнения колебаний

Ashirbaeva Ayzharkyn Zhorobekovna
Doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Mukhambetkabyl kyzy Toktobu – graduate student,
Osh technological university

SOLUTION OF THE EQUATION OF OSCILLATIONS BY THE METHOD OF ADDITIONAL ARGUMENT

In a new way, using the method of an additional argument, the initial problem for a general equation of hyperbolic type is reduced to a system of integral equations.

Key words: Argument, integral equation, vibration equations

В настоящее время развивается метод изучения дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных под названием метод дополнительного аргумента.

Основы метода дополнительного аргумента созданы в работах [1-4].

В данной работе предложен новый способ решения уравнения колебаний на основе метода дополнительного аргумента.

Рассматривается следующее уравнение колебаний

$$u_{tt}(t,x)=a^2u_{xx}(t,x)+bu_t(t,x)+cu_x(t,x)+f(t,x,u), \quad (1) \quad (t,x)\in G_2(T),$$

$G_2(T)=[0,T]\times R$,

с начальными условиями $\left.\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0}=u_k(x), \quad k=0,1, \quad x\in R.$ (2)

Обозначим через $C^{(k)}(\Omega)$ -пространства функций, определенных и непрерывных (соответственно вместе со всеми своими производными до порядка k) на Ω.

Пусть в (1),(2)

$$u_k(x)\in \overline{C}^{\,(2-k)}(R), (k=0,1), \ a,b,c-const, \ a\neq 0.$$

Воспользуемся следующими обозначениями:

$$\vartheta(t,x)=\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial u}{\partial x}, \ (3) \quad \alpha=b+\frac{c}{a}, \quad \beta=b-\frac{c}{a}.$$

$$p(s,t,x)=x+a(t-s),$$
$$q(s,t,x)=x-a(t-s),$$
$$(s,t,x)\in Q_2(T)=\{0\le s\le t\le T,\ x\in R\}.$$

ЛЕММА. Задача (1)-(2) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\vartheta(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\frac{\alpha}{2}u+\frac{\beta}{2}\int_0^t\vartheta(s,q)ds+\int_0^t f(s,q,u(s,q))ds, \quad (4)$$

$$u(t,x)=u_0\big(p(0,t,x)\big)+\int_0^t\vartheta\big(s,p(s,t,x)\big)ds\,, \quad (5)$$

где $\big[2\vartheta(t,x)-\alpha u(t,x)\big]_{t=0}=\varphi_1(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vartheta(t,x),\ \ u(t,x)$ - решение системы интегральных уравнений (4), (5).

Непосредственным дифференцированием из (4) имеем:

$$\vartheta_t(t,x)+a\vartheta_x(t,x)=\varphi_1'[q_t-aq_x]+\frac{\alpha}{2}[u_t(t,x)+au_x(t,x)]+$$
$$+\frac{\beta}{2}\vartheta(t,x)+\frac{\beta}{2}\int_0^t\vartheta_x[q_t-aq_x]ds+f(t,x,u)+\int_0^t(f_x+f_uu_x)[q_t-aq_x]ds. \quad (6)$$

Принимая во внимание равенство $q_t-aq_x=0$ и обозначение (3), из (6) получаем:

$$u_{tt}(t,x)-a^2u_{xx}(t,x)=\frac{\alpha}{2}[u_t(t,x)+au_x(t,x)]+$$
$$+\frac{\beta}{2}[u_t(t,x)-au_x(t,x)]+f(t,x,u).$$

Отсюда получаем уравнению (1). Следовательно, решение системы уравнений (4)- (5) удовлетворяет уравнению (1). Такое решение удовлетворяет и начальному условию (2).

Теперь покажем, что, в свою очередь, решение задачи (1), (2) является решением системы интегральных уравнений (4)-(5). Для этого запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial(2\vartheta(t,x)-\alpha u(t,x))}{\partial t}+a\frac{\partial(2\vartheta(t,x)-\alpha u(t,x))}{\partial x}=\beta\vartheta(t,x)+2f(t,x,u). \quad (7)$$

Действительно, из (7) имеем:

$$2[\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+a\frac{\partial\vartheta}{\partial x}]-\alpha[\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}]=\beta\vartheta(t,x)+2f(t,x,u). \quad (8)$$

Используя обозначение (3), из (8) получаем:

$$2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial u}{\partial x}\right)+2a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\beta\left(\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial u}{\partial x}\right)+2f(t,x,u).$$

Из последнего равенства следует справедливость (7)
Решение задачи (7), (2) методом дополнительного аргумента сводится к интегральному уравнению (4). Из обозначения (3) следует справедливость (5).

В уравнение (4), подставляя (5), получаем интегральное уравнение относительно $\vartheta(t,x)$. К последнему интегральному уравнению применяется метод последовательных приближений.

Проверим эквивалентность на примерах. **Пример.** Рассмотрим уравнение колебания струны: $\dfrac{\partial^2u(t.x)}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u(t,x)}{\partial x^2}+f(t,x)$ (9) с начальными условиями (2)

Для (9)-(2) уравнение (4) имеет следующий вид: $\vartheta(t,x)=\dfrac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\displaystyle\int_0^t f(s,q)ds,$

Где $\varphi_1(x) = 2(u_t - au_x)|_{t=0} = 2(u_1(x) - au_0^{/}(x))$.

Следовательно $\vartheta(t,x) = u_1(x-at) - au_0^{/}(x-at) + \int\limits_0^t f(s, x-at+as)ds,$

Из (5) имеем

$$u(t,x) = u_0(x+at) + \int\limits_0^t u_1(x+at-2as)ds - a\int\limits_0^t u_0^{/}(x+at-2as)ds +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau f(s, x+at-2a\tau+as)dsd\tau = u_0(x+at) + \int\limits_0^t u_1(x+at-2as)ds +$$

$$+\frac{1}{2}u_0(x+at-2as)|_0^t = u_0(x+at) + \frac{1}{2}u_0(x-at) - \frac{1}{2}u_0(x+at) + \int\limits_0^t u_1(x+at-2as)ds +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau f(s, x+at-2a\tau+as)dsd\tau =$$

$$= \begin{vmatrix} x+at-2as=\tau \\ ds = -\dfrac{d\tau}{2a} \\ s=0 \quad \tau = x+at \\ s=t \quad \tau = x-at \end{vmatrix} = \frac{u_0(a-xt) + u_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau f(s, x+at-2a\tau+as)dsd\tau.$$

Литература:

1. **Иманалиев, М.И.** О дифференциальном уравнении в частных производ-ных первого порядка с интегральным коэффициентом [Текст] / М.И. Иманалиев, Ю.А. Ведь //Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 3. – С. 465–477.
2. **Иманалиев, М.И.** Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными [Текст] / М.И. Иманалиев // Бишкек: Илим, 1992. –112 с.
3. **Иманалиев, М.И.** К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады Российской АН. – 1992. –Т. 323. – № 3. – С. 410–414.
4. **Аширбаева, А.Ж.** Развитие метода дополнительного аргумента для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных произ-водных: Автореф. дисс. канд. физ.–матем. наук. 01.01.02. [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Бишкек, 1995. – 15 с.