УДК 517.928

Анвар Авазович Халматов
кандидат физико-математических наук, доцент
Кыргызско-Узбекский университет
haa83@mail.ru

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ПОГРАНФУНКЦИЙ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАЙТХИЛЛА, В СЛУЧАЕ, КОГДА РЕШЕНИЕ НЕВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ИМЕЕТ ПОЛЮС ПЕРВОГО ПОРЯДКА В РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКЕ

Обобщенным методом погранфункций определяется равномерное разложение для сингулярно возмущенного уравнения Лайтхилла первого порядка, в случае, когда решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет полюс первого порядка в регулярной особой точке. На основе методов полной математической индукции, методов преобразований, а также обобщением идей методов структурного сращивания, методов униформизации и погранфункций получен новый метод получения обобщенных асимптотических разложений Пуанкаре. В данной статье рассматривается модельное уравнение Лайтхилла первого порядка, в новой постановке задачи Коши, который является более общим, чем метод погранфункций. Результаты данной работы могут быть применены в механике жидкостей и газов, квантовой механике.

Ключевые слова: асимптотический ряд, сингулярное возмущенное уравнение, регулярная особая точка, метод погранфункций, метод униформизации, метод структурного сращивания, метод математической индукции

Anvar Avazovich Halmatov
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor
Kyrgyz-Uzbek University

THE GENERALIZED METHOD OF BOUNDARY FUNCTIONS FOR THE LIGHTHILL'S MODEL EQUATION IN CASE OF THE SOLUTION OF UNPERTURBED EQUATION HAS THE POLE OF THE FIRST ORDER IN THE REGULAR SPECIAL POINT

Here by the generalized method of boundary function constructed the uniform approximation for the singular-perturbed Lighthill's model equation of first order, in case of the solution of corresponding unperturbed equation has a pole of the first order in a regular singular point. On the basis of methods of full mathematical induction, methods of transformations and also generalization of the ideas of methods of structural matching, methods of uniformization and boundary functions has received a new method of developing the generalized asymptotic approximation of Poincare. This article considered the Lighthill's model equation with the new statement of Cauchy's problem, which is more general, than a method of boundary function. The results of this work may be applied in mechanics of liquids and gases, quantum mechanics.

Key words: asymptotic series, the singularly perturbed equation, the regular singular point, method of boundary functions, method of uniformization, method of structural matching, method of mathematical induction.

Рассмотрим сингулярно возмущенное модельное уравнение Лайтхилла:

$\left(x+\varepsilon u(x)\right)\dfrac{du(x)}{dx}=-q(x)u(x)+r(x),\ u(1)=b,$ (1) где $0<\varepsilon$ – малый параметр, $0\le x\le 1$ – независимая переменная, b – известная постоянная, $q(x),r(x)\in C^{\omega}[0,1]$ – налитические функции на отрезке [0;1], $u(x)$ – искомая функция. Для невозмущенного уравнения (1), где $\varepsilon=0$: $Lu_0(x):=x\dfrac{du(x)}{dx}+q(x)u_0(x)=r(x),\ \ u_0(1)=b,$ (2) точка $x=0$ является регулярной особой точкой.

- Впервые задача (1) поставлена Лайтхиллом [1], целью которой является построение параметрического представления этой задачи, впоследствии названный его именем. Этот метод исследован многими математиками, такими как: В. Вазов, К. Комсток, К. Такахаси, М. Притуло, К. Алымкуловым и др.[2-5].
- Случай с полюсами первого [6-7], второго [8],третьего [9] и целого порядков [10] для уравнения (1) с начальными условиями (2) в регулярной особой точке рассмотрены К. Алымкуловым и А.Халматовым методом погранфункций. А также, для случая с логарифмическим ростом было построено асимптотическое разложение обобщенным методом погранфункций [11].

Постановка и решение задачи. Рассмотрим уравнение (1) со следующими начальными условиями: $u(0)=a.$ (3) Для этого в уравнении (1) сделаем подстановку: $x=\mu t, y(x)=\dfrac{1}{\mu}u(t),\ \ \mu^2=t.$ (4) В результате уравнение (1) примет следующий вид:

$\left(t+u(t)\right)u'(t)=q(\mu t)u(t)+\mu r(\mu t), t\in\left[0,\overset{\square}{\mu}\right],\ \overset{\square}{\mu}=\mu^{-1},$ (5) $u(0)=\mu a.$ (6)

Решение задачи (5)-(6) ищем в виде ряда $u(t)=u_0(t)+\mu u_1(t)+\mu^2u_2(t)+...,$ (7)

где функции $u_k(t)=u_k(t,\mu)$ и зависимость от малого параметра μ , для простоты не указываем. Подставляя (7) в (5), получим:

$$\left(t+u_0(t)+\mu u_1(t)+\mu^2u_2(t)+...\right)\left(u_0'(t)+\mu u_1'(t)+\mu^2u_2'(t)+...\right)=$$
$$=q(\mu t)\left(u_0(t)+\mu u_1(t)+\mu^2u_2(t)+...\right)+\mu r(\mu t),$$

Отсюда имеем

$\left(t+u_0(t)\right)u_0'(t)=q(\mu t)u_0(t),u_0(0)=\mu a$, ($7_0$)

$Lu_1(t)=\left(t+u_0(t)\right)u_1'(t)+\left(u_0'(t)-q(\mu t)u_1(t)\right)=r(\mu t),\ u_1(0)=0,$ (7_1)

$Lu_2(t)=-u_1(t)u_1'(t),\ u_2(0)=0,$ (7_2) $Lu_n(t)=-\sum\limits_{\substack{i+k=n\\ i,k\ge 1}}u_i(t)u_k'(t),\ u_n(0)=0,$ 7_n)

Теперь решим задачу (7_1). Невозмущенное дифференциальное уравнение (7_1): $\left(t+z_0(t)\right)z_0'(t)=-z_0(t),$ имеет общее решение $z_0(t)=-t+\sqrt{t^2+C^2}$,

где *C*- произвольная постоянная. Методом вариации постоянных Лагранжа будем искать решение задачи (7_1), тогда получим $c(t)=\mu a+\int_0^t\left(1+q(\mu s)\right)\left(-s+\sqrt{s^2+c^2(s)}\right)ds.$ (8)

Справедлива, **Теорема 1**. Решение уравнения (1) существует и единственна на отрезке $\left[0,\overset{\square}{\mu}\right]$ и справедлива оценка $\dfrac{1}{2}\mu a\le C(t)\le 2\mu a.$ (9) Эта теорема доказывается использованием принципа сжимающих отображений. Фундаментальное решение уравнения $Lu_1(t)=0$ имеет вид: $\Phi(t)=\dfrac{\mu a\psi(t)}{t+u_0(t)}$, где $\psi(t)=\exp\left\{\int_0^t \dfrac{1+q(\mu s)}{s+u_0(s)}ds\right\}$.

Лемма 1. $|\Phi(t)|\le l,\ \forall t\in\left[0,\mu^{-1}\right]$. Здесь и далее постоянную независимую переменную от малого параметра μ обозначим через l.

Лемма 2. Неоднородная задача $Lz(t)=g(t),\ z(0)=0,$ где $g(t)$ -непрерывная ограниченная функция на отрезке $\left[0,\mu\right]$ имеет единственное ограниченное решение, т.е. $|z(t)|\le l,\ \forall t\in\left[0,\mu\right]$. Доказательство это леммы следует из формулы $z(t)=\dfrac{1}{t+u_0(t)}\int_0^t \psi^{-1}(s)g(s)ds.$

Лемма 3. Задача (7_n) имеет единственное ограниченное решение для любого $\left[0,\mu\right]$, т.е. $|u_n(t)|\le l,\ \forall n\in N$.

Справедлива, **Теорема 2.** Ряд (7) является асимптотическим рядом на отрезке $\left[0,\mu\right]$, т.е. $u(t)=u_0(t)+\mu u_1(t)+\mu^2u_2(t)+...\mu^n u_n(t)+\mu^{n+1}R_{n+1}(t,\mu),$ где $R_n(t,\mu)=O(1),\ \forall t\in\left[0,\mu\right]$.

Отсюда, следует, что решение задачи (3) представляется в виде асимптотического ряда:
$$y(x)=\frac{1}{\mu}\left[u_0\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu u_1\left(\frac{x}{\mu}\right)+...+\mu^n u_n\left(\frac{x}{\mu}\right)+\mu^{n+1}R_n\left(\frac{x}{\mu}\right)\right].\ (10)$$

Таким образом, доказана **Теорема 3.** Пусть 1) $q(x),r(x)\in C^{(\infty)}[0,1]$; 2) $q_0=1$; 3) $a>0$ тогда решение задачи (1) с условиями (3) представляется в виде (10).

Пример. $(x+\varepsilon y(x))y'(x)+y(x)=1,\ u(0)=a\ne 0.$ (11) Имеет точное решение $y(x)=\dfrac{1}{\varepsilon}\left[-x\pm\sqrt{x^2+\varepsilon^2a^2+2\varepsilon x}\right]$. Знак + (-) соответствует значению $a>0\ (a<0)$.

Если сделать постановку $x=\mu t$, то $y(\mu t)=\dfrac{1}{\mu}\left[-t\pm\sqrt{t^2+\mu^2a^2+2\mu t}\right]$.(12)

Решение задачи (11) имеет вид $y(x,\varepsilon)=\dfrac{1}{\mu}\left[-t+\sqrt{t^2+\mu^2}+\dfrac{\mu t}{\sqrt{t^2+\mu^2a^2}}-\dfrac{\mu^2 t}{2\sqrt{\left(t^2+\mu^2a^2\right)^3}}+O\left(\mu^3\right)\right]$. (13)

Для решения задачи (11) можно так же воспользоваться методом униформизации:
$$\begin{cases}\xi\dfrac{du}{d\xi}=-u(\xi)+1,\quad u(1)=b,\\ \xi\dfrac{dx}{d\xi}=x(\xi)+\varepsilon u(\xi).\end{cases}$$
Решая уравнения для $u(\xi)$ получим $u(\xi)=\dfrac{\alpha}{\xi}+1,\ \alpha=a-1.$

Подставляя это уравнение в $x(\xi)$ имеем $\xi x'(\xi)=x(\xi)+\varepsilon\alpha\xi^{-1}+\varepsilon,\ x(1)=1.$ Отсюда $x(\xi)=\left(1+\dfrac{\varepsilon\alpha}{2}+\varepsilon\right)\xi-\dfrac{\varepsilon\alpha}{2}\xi^{-1}-\varepsilon.$ Т.о., параметрическое решение задачи (11) имеет вид

$$x(\xi)=\frac{\alpha}{\xi}+1,$$

$$x(\xi)=\left(1+\frac{\varepsilon\alpha}{2}+\varepsilon\right)\xi-\frac{\varepsilon\alpha}{2}\xi^{-1}-\varepsilon. \qquad (14)$$

Если точке $x=0$ соответствует точка η то $\eta \approx \sqrt{\frac{\varepsilon\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{\varepsilon(b-1)}{2}}$. Т.о. $u(0)\approx \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{\varepsilon\alpha}{2}}}=\sqrt{\frac{2\alpha}{\varepsilon}}=a \Rightarrow b=1+\frac{a^2\varepsilon}{2}$. Исключая из уравнения (14) параметр ξ

Литература:

1. **Алымкулов, К.** Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой// [Текст] / Халматов А.А. // Математические заметки. Россия. – Москва, 2012. – С.95-96. – Impackt factor 0,4.
2. **Халматов, А.А.** Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс второго порядка в регулярной особой точке // [Текст] Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Вып. 43. – Бишкек, 2010. – С. 89-94.
3. **Халматов А.А.** Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс третьего порядка в регулярной особой точке // [Текст] Вестник КНУ. – Бишкек, 2011. – С. 303-307.
10. **Халматов, А.А.** Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла, в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс целого порядка в регулярной особой точке // [Текст] Вестник ОшГУ. Вып 3.– Ош, 2012. – С.157-162.
11. **Алымкулов, К.** Обощенный метод погранфункций для сингулярно-возмущенного модельного уравнения Лайтхилла первого порядка, когда решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет логарифмический рост в регулярной особой точке// [Текст] / Халматов А.А., Белеков К.Ж. // Приволжский научный вестник.– №7 (59) – 2016. – С.17-22.
4. **Алымкулов, К.** Метод униформизации и обоснование метода Лайтхилла // [Текст] / Халматов А.А., Белеков К.Ж. // Изв. АН Киргиз. ССР.1981.– № 1. – С. 35-38.
5. **Алымкулов, К.** Метод малого параметра и обоснование метода Лайтхилла // [Текст] Изв. АН Киргиз. ССР. – 1979. № 6. – С. 8-11.
6. **Lighthill, M.J.** A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid // [Text] Phil. Magazine. –1949. – No. 40. – P.1179-1201.
7. **Comstok, C.** The Poincare-Lighthill perturbation technique and its generalizations // SIAMReview. - 1972. - V.14, № 3. – P. 433-443.
8. **Alymkulov, K.** About new statement and about new method of Cauchy problem for singular perturbed differential equation of the type of Lighthill / [Text]/ Matanova K.B., Khalmatov A.A.// International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR) Volume 3, Issue X, July 2015, PP.54 -64.
9. **Alymkulov, K.** A boundary function method for solving the model Lighthill equation with a regular singular point / [Text]/ Khalmatov A.A.// ISSN 0001-4346, Mathematical Notes, Vol. 92, No. 6. – Moscow, 2012. – P. 117–121. – Impackt factor 0,4.