

**РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С
УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ СЖИМАЮЩИХ УСИЛИЙ В ДВУХ
НАПРАВЛЕНИЯХ ПО ОСЯМ X И Y И НЕПОЛНОГО КОНТАКТА С ОСНОВАНИЕМ, В
ВИДЕ ДВУХ ТРАНШЕЙ, РАСПОЛОЖЕННЫХ ПОД ПЛИТОЙ СИММЕТРИЧНО
ОТНОСИТЕЛЬНО
ОСИ Y**

В статье приведены результаты численной реализации задачи об изгибе бесконечной плиты на упругом основании с учетом влияния продольных сжимающих усилий в двух направлениях по осям X и Y и неполного контакта с основанием, в виде двух траншей, расположенных под плитой симметрично относительно оси Y. Приведен анализ результатов.

Ключевые слова: усилия, основание, бесконечная плита, прогиб, плоскость, влияние.

A.T.Marufiy – d. of t. s., professor, OshTU,
E. S. Rysbekova – c. of t. s., associate professor OshTU

**RESULTS OF THE CALCULATION OF THE INFINITE PLATE ON AN ELASTIC
FOUNDATION BASED ON THE ACCOUNT OF THE INFLUENCE OF LONGITUDINAL
COMPRESSIONAL EFFORTS IN THE TWO DIRECTIONS ON THE AXIS X AND Y
AND THE INCOMPLETE CONTACT WITH THE BASIS, IN THE TYPE OF THE TWO
TRENCHES LOCATED UNDER THE PLATE SYMMETRICALLY AS THE
YEARS Y**

The results of the numerical realization of the bending problem of an infinite plate on an elastic foundation are given in the article, taking into account the effect of longitudinal compressive forces in two directions along the X and Y axes and incomplete contact with the base, in the form of two trenches placed symmetrically under the Y axis under the plate.

Keywords: force, base, infinite slab, deflection plane influence.

Введение. В практике проектирования фундаментов зданий и сооружений на просадочных грунтах в центральной части конструкций фундаментов может образоваться провал уже в процессе эксплуатации. Когда нагрузка и неполный контакт расположены в центре достаточно гибкой плиты и их размеры несоизмеримы, она может быть рассчитана по расчетной схеме бесконечной плиты.

Цель исследования. Численная реализация ранее полученных авторами аналитического решения задачи об изгибе бесконечной плиты на упругом основании с учетом влияния продольных сжимающих усилий в двух направлениях по осям X и Y и неполного контакта с основанием, в виде двух траншей, расположенных под плитой симметрично относительно оси Y. Подробный анализ полученных результатов.

Метод исследования. На основе ранее полученного авторами алгоритма составлена программа расчета в среде Delphi, вывод графиков осуществлялся с помощью системы AutoCAD.

Рассмотрим плиту, лежащую на упругом основании и предположим, что нагрузка приложена в центре плиты между двумя отверстиями, расположенными симметрично оси Y (рис.1), каждая шириной $2a$ [1, 3, 5, 6, 8].

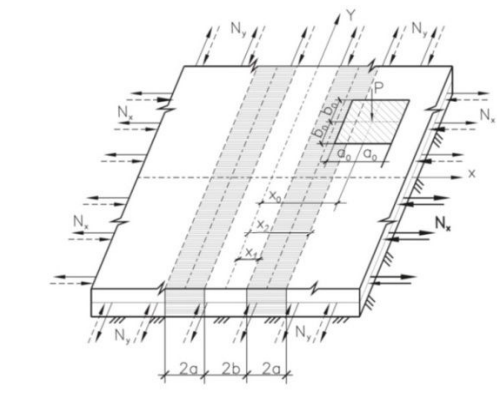
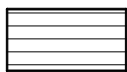


Рис.1. Расчетная схема бесконечной плиты на упругом основании с учетом влияния продольных усилий, расположенных в срединной плоскости плиты и неполного контакта в виде двух траншей, расположенных симметрично оси Y.



- участок неполного контакта.

В этом случае исходное дифференциальное уравнение изгиба плиты в безразмерных координатах и функциях имеет вид [4, 7]:

$$\nabla\nabla\omega(x, y) + [\theta(x - b - 2a) + \theta(b - x)]\omega(x, y) - 2\alpha_1 \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x^2} - 2\alpha_2 \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial y^2} = q_0(x, y) \quad (1)$$

переход к безразмерным величинам [1, 2] нагрузка симметричная относительно обеих осей.

Применив к выражению (1) двумерное прямое и обратное преобразование Фурье, получим следующее интегральное уравнение [1, 2]:

$$\omega(x, y) = \omega_\infty(x, y) + \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_1 \eta^2 + 1]} \times \int_b^{b+2a} \omega(t, \eta) \cos \xi t dt \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (2)$$

Выражение (2) можно записать в виде:

(3)

Применим к этому уравнению интегральное преобразование Фурье по координате

(4)

Входящие в уравнение (4) выражение ядра правой части определяются формулами в работе [7], с учетом этого уравнение (4) может быть переписано для различных положений координат. Если находится между отверстиями, т.е. , то уравнение(4) является уравнением с вырожденным ядром и его решение может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \omega(x, \eta) &= \omega_0(x, \eta) + \int_b^{b+2a} \omega(t, \eta) K(x, \eta, t) dt = \omega_0(x, \eta) + \\ &+ \frac{\psi_1(\eta, x)}{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1}} \int_b^{b+2a} \omega(t, \eta) \rho(\eta+t) dt \\ &+ \frac{\psi_2(\eta, x)}{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1}} \int_b^{b+2a} \omega(t, \eta) \rho(\eta-t) dt \\ &= \omega_\infty(x, \eta) + C_1(\eta, b, a) \psi_1(\eta, x) + C_2(\eta, b, a) \psi_2(\eta, x) \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$C_i(\eta, b, a) = \frac{1}{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1}} \int_b^{b+2a} \omega(t, \eta) \varphi_i(\eta, t) dt; \quad (i=1,2) \quad (6)$$

Коэффициенты $C_i(\eta, b, a)$ вычисляются по формуле аналогичным в работе [7]. Для их определения умножим обе части на $\varphi_i(\eta, t)$ и интегрируем от b до $(b+2a)$.

$$\left. \begin{aligned} C_1(\eta, b, a) &= \phi_1(\eta, a) + C_1(\eta, b, a) \phi_{11}(\eta, a) + C_2(\eta, b, a) \phi_{21}(\eta, a) \\ C_2(\eta, b, a) &= \phi_2(\eta, a) + C_1(\eta, b, a) \phi_{12}(\eta, a) + C_2(\eta, b, a) \phi_{22}(\eta, a) \end{aligned} \right\} (7)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_i(\eta, b, a) &= \frac{1}{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1}} \int_b^{b+2a} \omega(t, \eta) \rho_i(\eta, t) dt, \\ (i=1,2) \quad (k=1,2) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\phi_{ik}(\eta, b, a) = \frac{1}{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1}} \int_b^{b+2a} \omega(t, \eta) \rho_k(\eta, t) dt, \quad (9)$$

Решая систему (7), определим искомые коэффициенты

$$C_1(\eta, b, a) = \frac{O_1}{O} \quad (10)$$

$$C_2(\eta, b, a) = \frac{O_2}{O} \quad (11)$$

Здесь

(12)

Если рассматриваемая точка находится над одним из отверстий, т.е. случае

ТО В ЭТОМ

$$\begin{aligned}
\omega(x, \eta) = & \omega_{\infty}(x, \eta) + \int_b^{b+2a} \phi(t, \eta) K(x, \eta, t) dt = \omega_{\infty}(x, \eta) + \\
& + \frac{\varphi_1(\eta, x)}{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha \xi^2 - 2\alpha \eta^2 + 1}} \int_b^x \omega(t, \eta) \psi(\eta, t) dt \\
& + \frac{\varphi_2(\eta, x)}{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha \xi_1^2 - 2\alpha \eta_2^2 + 1}} \int_b^x \omega(t, \eta) \psi(\eta, t) dt \\
& + \frac{\psi_1(\eta, x)}{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha \xi_1^2 - 2\alpha \eta_2^2 + 1}} \int_x^{b+2a} \omega(t, \eta) \rho(\eta, t) dt \\
& + \frac{\psi_2(\eta, x)}{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha \xi_1^2 - 2\alpha \eta_2^2 + 1}} \int_x^{b+2a} \omega(t, \eta) \rho(\eta, t) dt;
\end{aligned} \tag{13}$$

И на этом участке необходимо применить численное интегрирование, сводя интегральное уравнение (13) к системе алгебраических уравнений при фиксированных значениях x .

И наконец, если рассматриваемая точка находится в зоне контакта с основанием, т.е. $(b + 2a) \leq x$, интегральное уравнение (4) опять сводится к уравнению с вырожденным ядром и его решение имеет вид:

$$\begin{aligned}
\omega(x, \eta) = & \omega_{\infty}(x, \eta) + \int_b^{b+2a} \phi(t, \eta) K(x, \eta, t) dt = \\
= & \omega_{\infty}(x, \eta) + \frac{\varphi_1(x, \eta)}{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha \xi^2 - 2\alpha \eta^2 + 1}} \int_b^{b+2a} \omega(t, \eta) \psi(\eta, t) dt + \\
& + \frac{\varphi_2(x, \eta)}{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha \xi^2 - 2\alpha \eta^2 + 1}} \int_b^{b+2a} \omega(t, \eta) \psi(\eta, t) dt + \\
& + C_3(\eta, b, a) \varphi_1(x, \eta) + C_4(\eta, b, a) \varphi_2(x, \eta)
\end{aligned} \tag{14}$$

Где

$$C_i(\eta, b, a) = \frac{1}{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha \xi^2 - 2\alpha \eta^2 + 1}} \int_b^{b+2a} \omega(t, \eta) \psi_i(\eta, t) dt; \quad (i = 3, 4)$$

Кoeffициенты $C_i(\eta, b, a)$ определяются по формулам аналогичным в работе [7], входящие в них функции ψ_i и ρ определяются по формулам аналогичным в работе [7], с заменой только нижнего предела интегрирования на b , а верхнего на $b + 2a$. После определения трансформанты Фурье функции прогиба плиты по формулам (5 и 13) истинные значения прогибов определяются из обратного преобразования Фурье

$$(15)$$

Продифференцировав выражение (2), получим выражения изгибающих моментов и

приведенных поперечных сил:

$$\left\{ \begin{aligned} M_x(x, y) &= M_{\infty x}(x, y) - \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\xi^2 + \nu\eta^2) \cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \int_b^{b+2a} \alpha(t, \eta) \cos \xi t \cdot d\xi \cdot d\eta \\ M_y(x, y) &= M_{\infty y}(x, y) - \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\eta^2 + \nu\xi^2) \cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \int_b^{b+2a} \alpha(t, \eta) \cos \xi t \cdot d\xi \cdot d\eta \\ Q_x(x, y) &= Q_{\infty x}(x, y) + \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{[\xi^3 + (2-\nu)\xi\eta^2] \cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \int_b^{b+2a} \alpha(t, \eta) \cos \xi t \cdot d\xi \cdot d\eta \\ Q_y(x, y) &= Q_{\infty y}(x, y) - \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{[\eta^3 + (2-\nu)\xi^2\eta] \cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \int_b^{b+2a} \alpha(t, \eta) \cos \xi t \cdot d\xi \cdot d\eta; \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Результаты численной реализации приведены на рис. 2 и в табл. 1.

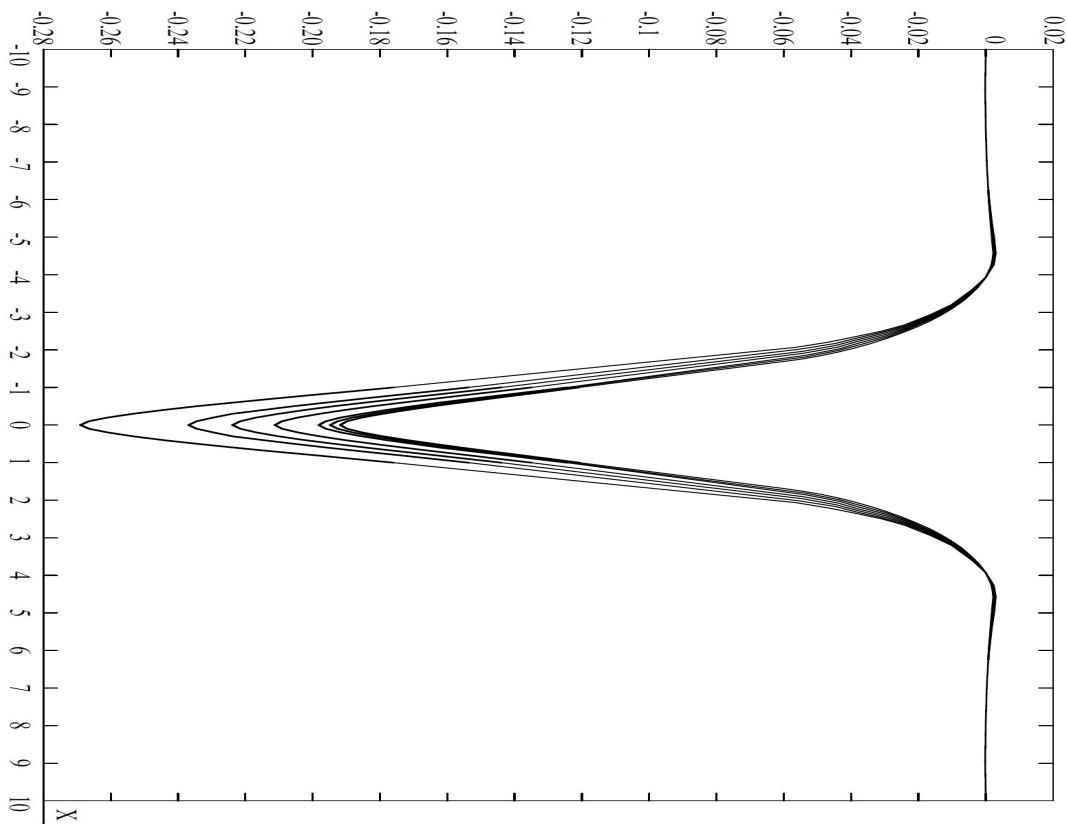


Рис.2. Эпюры прогибов $\omega(x, y)$ бесконечной плиты на упругом основании с учетом влияния продольных сжимающих усилий в двух направлениях по осям X и Y и неполного контакта с основанием в виде двух траншей, расположенных симметрично относительно оси Y.

Таблица 1

Результаты расчета бесконечной плиты на упругом основании с учетом влияния продольных сжимающих усилий в двух направлениях по осям X и Y и неполного контакта с основанием в виде двух траншей, расположенных симметрично относительно оси Y.

Значения прогибов $\omega(x, y)$ в бесконечной плите								
ω_z	x_1	x_2/x	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
a06	0.0	0.6	0.2690	0.2665	0.2608	0.2534	0.2444	0.2344

a16	0.1	0.6	0.2369	0.2345	0.2294	0.2238	0.2147	0.2056
a26	0.2	0.6	0.2238	0.2215	0.2166	0.2101	0.2023	0.1937
a36	0.3	0.6	0.2112	0.2091	0.2043	0.1979	0.1904	0.1821
a46	0.4	0.6	0.1982	0.1961	0.1915	0.1853	0.1781	0.1703
a56	0.5	0.6	0.1948	0.1926	0.1880	0.1819	0.1747	0.1669
a66	0.6	0.6	0.1918	0.1898	0.1852	0.1791	0.1719	0.1641
ω_z	x_1	x_2/x	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
a06	0.0	0.0	0.2344	0.2234	0.2118	0.1999	0.1880	0.1760
a16	0.1	0.1	0.2056	0.1958	0.1854	0.1748	0.1643	0.1537
a26	0.2	0.2	0.1937	0.1842	0.1742	0.1641	0.1541	0.1440
a36	0.3	0.3	0.1821	0.1731	0.1637	0.1542	0.1447	0.1350
a46	0.4	0.4	0.1703	0.1622	0.1526	0.1431	0.1339	0.1244
a56	0.5	0.5	0.1669	0.1585	0.1498	0.1408	0.1320	0.1231
a66	0.6	0.6	0.1641	0.1558	0.1472	0.1384	0.1296	0.1208

Выводы:

Анализ результатов расчета бесконечной плиты на упругом основании с учетом влияния продольных сжимающих усилий в двух направлениях по осям X и Y, действующих в срединной плоскости плиты и неполного контакта с основанием в виде двух траншей, расположенных симметрично относительно оси Y (рис.1) показывает, что прогибы при $x_1=0$ и $x_2=0.6$, т. е. случай полного контакта плиты с основанием $\omega(x,y)=0.1918$, совпадают ранее полученными значениями для прогибов для случая одной траншеи $a=0.6$ $\omega(x,y)=0.2690$, также совпадает, что является подтверждением достоверности полученных результатов. Также следует отметить, что при изменении $x_1=0 \div 0.6$ и при постоянном $x_2=0.6$ (рис.2) прогибы уменьшаются от 0.2690 до 0.1918 в 1.4 раза.

Если анализировать учет влияния только неполного контакта плиты с основанием в виде двух траншей без учета влияния продольных сжимающих усилий при полуширине траншеи $a=0.5$ в начале координат при $x=0$, если прогиб равен $\omega(x,y)=0.1655$, а с учетом влияния продольных сжимающих усилий в двух направлениях по осям X и Y и неполного контакта плиты с основанием в виде двух траншей, расположенных симметрично относительно оси Y (рис.2) прогиб $\omega(x,y)=0.2369$ при полуширине траншей $a=0.5$ т. е. в 1.43 раза больше.

Литература:

1. **Градштейн, И.С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И.С. Градштейн, И.И. Рыжик – М.: Физматгиз, 1962.– 1108с.
2. **Травуш, В.И.** Об одном методе решения задач изгиба конструкций, лежащих на винклеровском основании [Текст] / В. И. Травуш // Сб. трудов вопросы архитектуры и строительства зданий для зрелищ, спорта и учреждений культуры. – М.,1976. – №4, – С.83-89.
3. **Маруфий, А.Т.** Изгиб бесконечной плиты на упругом основании с неполным контактом с основанием [Текст] / Травуш В.И. // Научный вестник ФерГУ, 1995; №1-2.– с.71-77.
4. **Маруфий, А.Т.** Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на упругом основании Винклера, с учетом влияния продольных усилий. [Текст] / А. Т. Турганбаев // Научный вестник ФерГУ. – Ош, 1996. – №1. – С. 70-73.
5. **Маруфий, А.Т.** Расчёт плит на упругом при отсутствии основания под частью плиты // Научный журнал “Основания, фундаменты и механика грунтов.” – М.: 1999; № 4.– с.27-31.
6. **Маруфий, А.Т.** Изгиб различных схем плит на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием [Текст] – М.: Издательство АСВ, 2003. – 208 с.
7. **Маруфий, А.Т.** Изгиб бесконечной плиты, лежащей на винклеровском упругом основании с учетом влияния продольных усилий и неполного контакта с основанием [Текст] /

Рысбекова Э.С. // Вестник КГУСТА, 2015; №2. – с. 66-70.

8. **Маруфий, А.Т.** Изгиб бесконечной плиты, лежащей на винклеровском упругом основании с учетом влияния продольных усилий и неполного контакта в виде двух траншей, расположенных симметрично оси y [Текст] / Э. С. Рысбекова, Ч. А. Капаров // Актуальные проблемы развития строительных конструкций: инновации, модернизация и энергоэффективность в строительстве: Сб. матер. межд. науч.-практ. конф. – Алматы: Изд. КазГАСА, 2016. – С. 108-113.