

**ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ НА
УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ
РАСТЯГИВАЮЩИХ УСИЛИЙ ПО ОСИ X И СЖИМАЮЩИХ ПО ОСИ Y
ИНЕПОЛНОГО КОНТАКТА С ОСНОВАНИЕМ, В ВИДЕ ОДНОЙ ТРАНШЕИ,
РАСПОЛОЖЕННОЙ ПОД ПЛИТОЙ ВДОЛЬ ОСИ Y**

В статье приведены результаты численной реализации задачи об изгибе бесконечной плиты на упругом основании с учетом влияния продольных растягивающих усилий по оси X и сжимающих по оси Y и неполного контакта с основанием, в виде одной траншеи, расположенной под плитой вдоль оси Y. Приведен анализ результатов.

Ключевые слова: усилия, основание, бесконечная плита, прогиб, плоскость, влияние.

A.T. Marufiy - Doctor of Technical Sciences, professor, OshTU
E. S. Rysbekova - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, OshTU

**NUMERICAL REALIZATION OF BENDING PROBLEM FOR AN INFINITE PLATE ON
AN ELASTIC FOUNDATION WITH THE INFLUENCE LONGITUDINAL TENSILE
FORCES ALONG THE X AXIS AND Y AXIS SHRINK AND INCOMPLETE CONTACT
WITH THE GROUND, IN A SINGLE TRANCHE PLACED AT THE SLAB ALONG THE
AXIS Y**

The results of numerical realization of the problem of bending of infinite plate on an elastic foundation, taking into account the impact of longitudinal tensile forces on the x-axis and y-axis of contraction and incomplete contact with the ground, in the form of a trench beneath the slab along the y axis. An analysis of the results.

Keywords: force, base, infinite slab, deflection plane influence.

Введение. В практике проектирования фундаментов зданий и сооружений на просадочных грунтах в центральной части конструкций фундаментов может образоваться провал уже в процессе эксплуатации. Когда нагрузка и неполный контакт расположены в центре достаточно гибкой плиты и их размеры несоизмеримы, она может быть рассчитана по расчетной схеме бесконечной плиты.

Цель исследования. Численная реализация ранее полученных авторами аналитического решения задачи изгиба бесконечной плиты на винклеровском упругом основании с учетом влияния продольных растягивающих усилий по оси X и сжимающих по оси Y, расположенных в срединной плоскости плиты и неполного контакта с основанием в виде одной траншеи в центральной части под плитой вдоль оси Y. Подробный анализ полученных результатов.

Метод исследования. На основе ранее полученного авторами алгоритма составлена программа расчета в среде Delphi и вывод графиков осуществлялся с помощью системы AutoCAD.

В работе [5] разработан алгоритм расчета бесконечной плиты, лежащей на винклеровском упругом основании с учетом влияния продольных усилий, приложенных в срединной плоскости плиты и неполного контакта плиты с основанием.

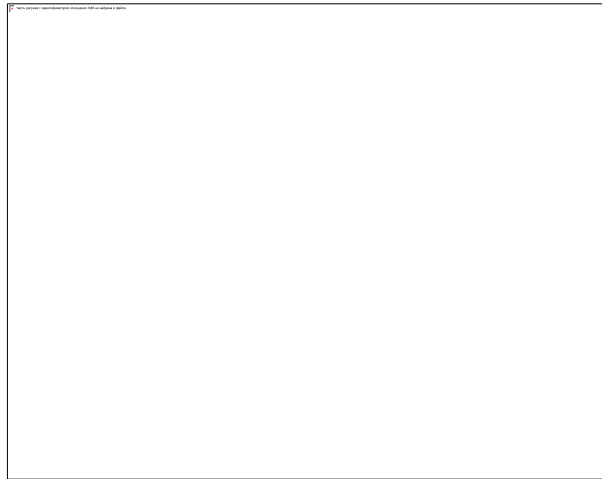


Рис.1. Бесконечная плита, лежащая на винклеровском упругом основании с учетом влияния продольных усилий и неполного контакта с основанием.

В этом случае прогибы плиты $\omega(x, y)$ определяются из решения дифференциального уравнения вида [2(71-77), 3(70-73), 4(27-31)]:

$$D\nabla\nabla\omega(x, y) + \kappa\theta(x-a)\omega(x, y) - N_x \frac{\partial^2\omega(x, y)}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2\omega(x, y)}{\partial y^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2\omega(x, y)}{\partial x\partial y} = q_0(x, y) \quad (1)$$

Здесь D – цилиндрическая жесткость плиты;

K – коэффициент постели основания;

$\theta(a)$ – функция Хевисайда, введение которой позволяет учесть отсутствие основания под частью плиты;

$2a$ – ширина траншеи (неполного контакта с основанием) в основании;

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ – оператор Лапласа;}$$

N_x, N_y – интенсивность растягивающих (сжимающих) усилий вдоль осей x и y , считаются положительными в случае растяжения;

N_{xy} – интенсивность касательных усилий в срединной плоскости;

В дальнейшем в связи с малой интенсивностью касательных усилий, приложенных в срединной плоскости, не снижая общности задачи, положим $N_{xy}=0$.

Перейдя к безразмерным координатам $x_1=xl^{-1}; y_1=yl^{-1}; a_1=al^{-1}; q_1(x, y)=q(x, y)k^{-1}; l=\frac{D^{1/4}}{k^{1/4}}$, получим, опуская индекс 1, следующее уравнение относительно прогиба плиты:

$$\left[\nabla\nabla + \theta(x-a) - 2\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \omega(x, y) = q_0(x, y) \quad (2)$$

Где

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \nabla = \xi^2 + \eta^2;$$

$$2\alpha_1 = \frac{N_x l^2}{D}; \quad 2\alpha_2 = \frac{N_y l^2}{D};$$

$\omega(x, y)$ – функция прогиба;

$q(x, y)$ – заданная нагрузка

Применив к выражению (2) обратное двумерное cos-преобразование Фурье, получим [4 (с. 70-73),5 (27-31)]:

$$\omega(x, y) - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \times \frac{2}{\pi} \int_0^a \omega(t, \eta) \cos \xi t \cdot \cos \eta y \cdot dt \cdot d\xi \cdot d\eta = \omega_\infty(x, y) \quad (3)$$

Продифференцировав, выражение прогибов (3), получим выражения изгибающих моментов и приведенных поперечных сил:

$$\left\{ \begin{aligned} M_x(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\xi^2 + v\eta^2) \cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \omega(t, \eta) \cos \xi t dt \cdot d\xi \cdot d\eta + M_{\omega_x}(x, y); \\ M_y(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(v\xi^2 + \eta^2) \cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \omega(t, \eta) \cos \xi t dt \cdot d\xi \cdot d\eta + M_{\omega_y}(x, y); \\ Q_x(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{[\xi^3 + (2-v)\xi\eta^2] \cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \omega(t, \eta) \cos \xi t dt \cdot d\xi \cdot d\eta + Q_{\omega_x}(x, y); \\ Q_y(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{[\eta^3 + (2-v)\xi^2\eta] \cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \omega(t, \eta) \cos \xi t dt \cdot d\xi \cdot d\eta + Q_{\omega_y}(x, y); \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Результаты численной реализации приведены на рис.2, 3 и табл. 2, 3.

Таблица 1

Результаты расчета бесконечной плиты на упругом основании с учетом влияния неполного контакта плиты с основанием без учета влияния продольных усилий, приложенных в срединной плоскости плиты

Значения прогибов $\omega(x,y)$ в бесконечной плите								
ω_z	x_1	x_2/x	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
a00	0.0	0.0	0.1249	0.1236	0.1206	0.1166	0.1119	0.1068
a01	0.0	0.1	0.1329	0.1314	0.1283	0.1241	0.1192	0.1138
a02	0.0	0.2	0.1400	0.1385	0.1353	0.1309	0.1258	0.1202
a03	0.0	0.3	0.1477	0.1462	0.1429	0.1384	0.1331	0.1272
a04	0.0	0.4	0.1562	0.1546	0.1512	0.1466	0.1411	0.1350
a05	0.0	0.5	0.1653	0.1637	0.1602	0.1555	0.1498	0.1434
a06	0.0	0.6	0.1751	0.1735	0.1699	0.1650	0.1591	0.1525
ω_z	x_1	x_2/x	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
a00	0.0	0.0	0.1068	0.1014	0.0958	0.0901	0.0844	0.0787
a01	0.0	0.1	0.1138	0.1081	0.1022	0.0961	0.0901	0.0841
a02	0.0	0.2	0.1202	0.1142	0.1080	0.1016	0.0953	0.0889
a03	0.0	0.3	0.1272	0.1209	0.1144	0.1078	0.1011	0.0944
a04	0.0	0.4	0.1350	0.1284	0.1215	0.1145	0.1075	0.1005
a05	0.0	0.5	0.1434	0.1366	0.1294	0.1220	0.1146	0.1072
a06	0.0	0.6	0.1525	0.1454	0.1379	0.1302	0.1224	0.1146

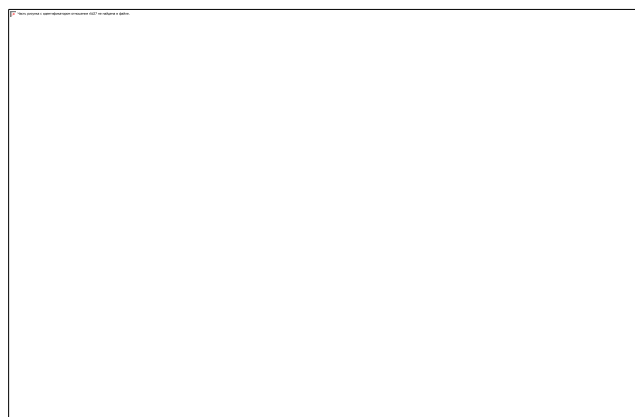


Рис. 2. Эпюры прогибов $\omega(x,y)$ в бесконечной плите на упругом основании с учетом влияния продольных растягивающих усилий по оси X и сжимающих по оси Y и неполного контакта с основанием в виде траншеи, расположенной в центральной зоне плиты при $x_1 = 0$ и увеличением ширины траншеи, т. е. при $x_2 = 0 \div 0.6$.

Таблица 2

Результаты расчета изгиба бесконечной плиты на упругом основании с учетом влияния растягивающих усилий по оси X и сжимающих по оси Y и неполного контакта с основанием.

Значения прогибов $\omega(x,y)$ в бесконечной плите								
ω_z	x_1	x_2/x	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
a00	0.0	0.0	0.1004	0.0994	0.0970	0.0938	0.0900	0.0859
a01	0.0	0.1	0.1068	0.1057	0.1032	0.0998	0.0959	0.0915
a02	0.0	0.2	0.1125	0.1114	0.1088	0.1053	0.1012	0.0966
a03	0.0	0.3	0.1187	0.1176	0.1149	0.1113	0.1071	0.1022
a04	0.0	0.4	0.1257	0.1244	0.1216	0.1179	0.1135	0.1085
a05	0.0	0.5	0.1328	0.1317	0.1288	0.1251	0.1205	0.1153
a06	0.0	0.6	0.1407	0.1396	0.1366	0.1327	0.1280	0.1226
ω_z	x_1	x_2/x	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
a00	0.0	0.0	0.0859	0.0816	0.0774	0.0728	0.0682	0.0636
a01	0.0	0.1	0.0915	0.0870	0.0826	0.0776	0.0728	0.0680
a02	0.0	0.2	0.0966	0.0919	0.0873	0.0820	0.0770	0.0719
a03	0.0	0.3	0.1022	0.0973	0.0925	0.0870	0.0817	0.0763
a04	0.0	0.4	0.1085	0.1033	0.0982	0.0924	0.0869	0.0812
a05	0.0	0.5	0.1153	0.1099	0.1046	0.0985	0.0926	0.0866
a06	0.0	0.6	0.1226	0.1170	0.1115	0.1051	0.0989	0.0925

Рис. 3. Эпюры изгибающих моментов $M_x(x,y)$ в бесконечной плите на упругом основании с учетом влияния продольных растягивающих усилий по оси X и сжимающих по оси Y и неполного контакта с основанием в виде траншеи, расположенной в центральной зоне плиты при $x_1 = 0$ и увеличением ширины траншеи, т. е. при $x_2 = 0 \div 0.6$.

Таблица 3

Значения изгибающих моментов $M_x(x,y)$ в бесконечной плите на упругом основании с учетом влияния продольных растягивающих усилий по оси X и сжимающих по оси Y и неполного контакта с основанием в виде траншеи, расположенной в центральной зоне плиты при $x_1 = 0$ и увеличением ширины траншеи, т. е. при $x_2 = 0 \div 0.6$.

Значения моментов $M_x(x,y)$ в бесконечной плите								
ω_z	x_1	x_2/x	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
a00	0.0	0.0	∞	-0.1256	-0.0859	-0.0642	-0.0449	-0.0321

a01	0.0	0.1	∞	-0.1309	-0.0902	-0.0653	-0.0477	-0.0343
a02	0.0	0.2	∞	-0.1355	-0.0943	-0.0687	-0.0504	-0.0364
a03	0.0	0.3	∞	-0.1398	-0.0985	-0.0720	-0.0531	-0.0384
a04	0.0	0.4	∞	-0.1439	-0.1029	-0.0768	-0.0572	-0.0419
a05	0.0	0.5	∞	-0.1478	-0.1069	-0.0809	-0.0613	-0.0454
a06	0.0	0.6	∞	-0.1850	-0.1106	-0.0847	-0.0653	-0.0495
ω_z	x_1	x_2/x	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
a00	0.0	0.0	-0.0321	-0.0221	-0.0141	-0.0077	-0.0025	0.0027
a01	0.0	0.1	-0.0343	-0.0238	-0.0153	-0.0085	-0.0030	0.0026
a02	0.0	0.2	-0.0364	-0.0253	-0.0165	-0.0092	-0.0033	0.0024
a03	0.0	0.3	-0.0384	-0.0269	-0.0174	-0.0103	-0.0040	0.0022
a04	0.0	0.4	-0.0419	-0.0296	-0.0197	-0.0116	-0.0048	0.0018
a05	0.0	0.5	-0.0454	-0.0325	-0.0219	-0.0131	-0.0060	0.0011
a06	0.0	0.6	-0.0495	-0.0360	-0.0249	-0.0153	-0.0075	0.0003

Выводы:

Анализ результатов расчета бесконечной плиты на упругом основании с учетом влияния продольных растягивающих усилий по оси X и сжимающих по оси Y , действующих в срединной плоскости плиты и неполного контакта плиты с основанием, в виде одной траншеи расположенной вдоль оси Y шириной $2a$ (рис. 1) показывает, что прогибы $\omega(x,y)$ уменьшаются по сравнению без учета вышеперечисленных продольных усилий (табл.1). Если при учете их и полуширине траншеи $a=0.6$, прогибы $\omega(x,y)$ равны 0.1407, то без учета при той же полуширине траншеи прогиб $\omega(x,y)$ равен 0.1751, т. е. в 1.24 раза меньше. Следует отметить, что прогибы $\omega(x,y)$ увеличиваются при изменении полуширины траншеи $a = 0 \div 0.6$, если при $a=0$ (случай полного контакта с плиты с основанием) прогиб $\omega(x,y)$ равен 0.1004, то при $a=0.6$ он равен 0.1407, т. е. в 1.4 раза больше.

Надо отметить, что изгибающие моменты $M_x(x,y)$ уменьшаются по абсолютной величине при учете продольных растягивающих усилий по оси X и сжимающих по оси Y , расположенных в срединной плоскости плиты и неполного контакта с основанием в виде траншеи расположенной в срединной плоскости под плитой вдоль оси Y полушириной $a=0.6$ в безразмерных величинах в 1.124 раза по сравнению без учета этих усилий.

Литература:

1. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И.С. Градштейн, И.И. Рыжик – М.: Физматгиз, 1962.– 1108с.
2. Маруфий, А.Т. Изгиб бесконечной плиты на упругом основании с неполным контактом с основанием [Текст] / А. Т. Маруфий, В. И. Травуш // Научный вестник ФерГУ. – Фергана, 1995.– №1. – С. 71-77.
3. Маруфий, А.Т. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на упругом основании Винклера, с учетом влияния продольных усилий. [Текст] / А. Т. Маруфий, А. Т. Турганбаев // Научный вестник ФерГУ. – Ош, 1996. – №1. – С. 70-73.
4. Маруфий, А.Т. Расчёт плит на упругом при отсутствии основания под частью плиты [Текст] / А. Т Маруфий // Основания, фундаменты и механика грунтов.– М., 1999. – №4.– С. 27-31.
5. Маруфий, А.Т. Изгиб бесконечной плиты, лежащей на винклеровском упругом основании с учетом влияния продольных усилий и неполного контакта с основанием [Текст] / А. Т Маруфий, Э. С Рысбекова // Вестник КГУСТА. – Бишкек, 2015. – №2. – С. 66-70.
6. Травуш, В.И. Об одном методе решения задач изгиба конструкций, лежащих на винклеровском основании [Текст] / В. И. Травуш // Сб. трудов вопросы архитектуры и строительства зданий для зрелищ, спорта и учреждений культуры. – М.,1976. – №4, – С.83-89.

