УДК 512.86

Ж. Саттаров, К.И. Борубаева – д.ф.-м.н., профессор, ст.лаборант ОГПИ
Zh. Sattarov, K.I. Borubaeva – d.ph.-m.s.,professor,senior assistant OHPI

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ НАД КОММУТАТИВНЫМ ПОЛУЛОКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ

Над (ассоциативно-)коммутативным кольцом R *вводится понятие об-обменной симплектической группы* $Sp^{\circ}(2n,R), n \geq 2.$ *В случае наличия 1 в* R *эта группа совпадает с обычной симплектической группой* $Sp(2n,R).$ *В рабо-те выявляются образующие и определяющие соотношения группы* $Sp^{\circ}(2n,R), n \geq 2,$ *над произвольным (не обязательно с 1) коммутативным полулокальным кольцом* R.

Ключевые слова: линейные группы, локальное кольцо, полулокальное кольцо, гибрид, трансформация.

DEFINING CORRELATIONS GENERALIZED SIMPLISTIC GROUPS ON COMMUTATIVE RING

On (associativno-)commutative ring R *ring is entered notion the fraudulent simplistic* $Sp^{\circ}(2n,R), n \geq 2.$ *of the group In the event of presence 1 in* R *this group complies with usual simplistic* $Sp(2n,R).$ $n \geq 2.$ *by group In slave-that are revealed forming and defining correlations of the group on free (not without fall with 1) commutative ring* R.

Keywords: linear group, a local ring, semi-local ring, a hybrid transformation.

1. Введение

Описание линейных групп в терминах образующих и соотношений составляет один из центральных вопросов в комбинаторной теории групп. Здесь наши исследования относятся к симплектическим группам. В указан- ном направлении наиболее общим можно считать результат [1], где были найдены порождающие и соотношения обычной симплектической группы $Sp(2n,R), n \geq 2,$ над локальным кольцом R с 1, подчиненным некоторым естес- твенным условиям. Нашей целью в этой работе является выявление образующих элементов и определяющих соотношений обобщенной симплектической группы $Sp^{\circ}(2n,R), n \geq 2,$ над произвольным коммутативным и не обязательно с 1 полулокальным кольцом R. Как мы увидим далее, в случае наличия 1 в R рассматриваемая здесь группа $Sp^{\circ}(2n,R)$ (абстрактно) совпадает с обычной симплектической группой $Sp(2n,R)$. Хорошо известно, что симплектическая группа представляет собой удивительный гибрид специальной и ортогональной подгрупп полной линейной группы.

При представлении группы $Sp^{\circ}(2n,R), n \geq 2,$ применяется метод трансформации, развитый в работах $[2]-[6]$.

2. Обоснование изучаемого объекта

Группа $Sp^{\circ}(2n,R)$ вводится следующим образом. Пусть $\Lambda -$ произволь-
ное ассоциативное кольцо и $\circ$ $-$ его квазиумножение, т.е. $x \circ y = x + xy + y.$
Элемент $\alpha \in \Lambda$ называется квазиобратимым, если $\alpha \circ \beta = 0 = \beta \circ \alpha$ при некотором β из Λ. По квазиобратимому $\alpha \in \Lambda$ его квазиобратное $\beta = \alpha'$ всегда определяется однозначно. Совокупность всех квазиобратимых элементов Λ° кольца Λ образует группу относительно

композиции $\circ$ (где единицей будет нуль). В случае, когда $\Lambda = M(2n,R)-$ полное матричное кольцо (основное кольцо ассоциативно), группу квазиобратимых матриц из $M(2n,R)$ обозначим как $GL^{\circ}(2n,R)$ и назовем ее обобщенной полной линейной группой над R степени $2n$. Ниже ^{T}, как всегда, будет обозначать транспонирование матриц.

Пусть теперь R – произвольное (ассоциативно-)коммутативное кольцо, для которого существование 1 не обязательно. Обозначим через $Sp^{\circ}(2n,R)$ мно-жество матриц $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ из $M(2n,R)$, разбитых на клетки порядка n и удовлетво- ряющих условиям

$$X - YZ^{T} + XT^{T} + T^{T} = Y + YX^{T} - XY^{T} - Y^{T} = Z - TZ^{T} + ZT^{T} - Z^{T} = 0. \qquad (Sp^{\circ})$$

Покажем, что $Sp^{\circ}(2n,R)$ образует подгруппу в $GL^{\circ}(2n,R)$. Пусть $a = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ – произвольная матрица из $Sp^{\circ}(2n,R)$. Составим по ней матрицу $b = \begin{pmatrix} T^{T} & -Y^{T} \\ -Z^{T} & X^{T} \end{pmatrix}$.

Соотношения (Sp°) показывают, что для них $a \circ b = 0$. Обратимся теперь к рабо- те [4], где над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом был введен квазиопределитель. Как там показано, этот квазиопределитель обладает свойством полноймультипликативности. Пусть $det^{\circ}-$квазиопределитель порядка $2n$ над кольцом R. Применяя его к рассматриваемым матрицам, будем иметь

$$det^{\circ} a \circ det^{\circ} b = det^{\circ}(a \circ b) = det^{\circ} 0 = 0,$$

т.е. имеем $det^{\circ} a \in R^{\circ}$. Но, как доказано в [6] (см. с. 177), так может быть (в том и) только в том случае, когда $a \in GL^{\circ}(2n,R)$. Последнее в свою очередь приводит нас к

$$a' = a' \circ 0 = a' \circ (a \circ b) = (a' \circ a) \circ b = 0 \circ b = b.$$

Теперь равенство $b \circ a = 0$ влечет за собой блочные соотношения

$$X - Y^{T}Z + T^{T}X + T^{T} = Y + T^{T}Y - Y^{T}T - Y^{T} = Z - Z^{T}X + X^{T}Z - Z^{T} = 0. \qquad (Sp^{\circ} \rightarrow)$$

Полученные следствия ($Sp^{\circ} \rightarrow$) показывают, что $b \in Sp^{\circ}(2n,R)$. Итак, установлено, что $Sp^{\circ}(2n,R)$ состоит только из квазиобратимыхматриц и оно наряду с каждым своим элементом a содержит также квазиобратное ему a'.

Возьмем теперь произвольным образом матрицу $c = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp^{\circ}(2n,R)$ (и здесь клетки имеют порядок n). Покажем, что квазипроизведение $a \circ c = \begin{pmatrix} X \circ A + YC & Y + XB + YD + B \\ Z + ZA + TC + C & ZB + T \circ D \end{pmatrix}$ также удовлетворяет условиям (Sp°). Действи-тельно, для последнего правильность первого равенства (Sp°) видна из

$$\begin{aligned}
&X \circ A + YC - (Y + XB + YD + B)(Z + ZA + TC + C)^{T} + (X \circ A + YC)(ZB + T \circ D)^{T} + \\
&(ZB + T \circ D)^{T} = X + XA + A + YC - (Y + XB + YD + B)(Z^{T} + A^{T}Z^{T} + C^{T}T^{T} + C^{T}) + \\
&(X + XA + A + YC)(B^{T}Z^{T} + T^{T} + D^{T}T^{T} + D^{T}) + B^{T}Z^{T} + T^{T} + D^{T}T^{T} + D^{T} = \\
&(X - YZ^{T} + XT^{T} + T^{T}) + (A - BC^{T} + AD^{T} + D^{T}) + X(A - BC^{T} + AD^{T} + D^{T}) + \\
&Y(C - DC^{T} + CD^{T} - C^{T}) + (A - BC^{T} + AD^{T} + D^{T})T^{T} - (B + BA^{T} - AB^{T} - B^{T})Z^{T} + \\
&Y(C - DC^{T} + CD^{T} - C^{T})T^{T} - Y(A - BC^{T} + AD^{T} + D^{T})^{T} Z^{T} - X(B + BA^{T} - AB^{T} - B^{T})Z^{T} + \\
&X(A - BC^{T} + AD^{T} + D^{T})T^{T} = 0
\end{aligned}$$

(в последнем члене все скобочные суммы – нулевые, ибо a, c удовлетворяют требованиям (Sp°)). Остальные равенства (Sp°) для $a \circ c$ проверяются анало-гично. А это означает, что $Sp^{\circ}(2n,R)$ образует систему относительно матрично-гоквазиумножения. Приведенные факты в совокупности показывают, что групповое включение $Sp^{\circ}(2n,R) \leq GL^{\circ}(2n,R)$ действительно имеет место. Группу $Sp^{\circ}(2n,R)$ мы и назовем *обобщенной симплектической группой* степени $2n$ над кольцом R.

Вернемся на короткое время к случаю, когда кольцо R обладает 1.
Обозначим через e и E единичные матрицы из $M(n,R)$ и $M(2n,R)$ соответст-венно. Пусть $I = \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix}$ – форма порядка $2n$ и пусть $Sp(2n,R) = \{x \in GL(2n,R) : xIx^T = I\}$ – классическая симплектическая группа над R степени $2n$. При принятых обозначениях имеют место легко проверяемыеэквивален-ции

$$a \in Sp^{\circ}(2n,R) \leftrightarrow (Sp^{\circ}) \leftrightarrow (E+a)I(E+a)^T = I \leftrightarrow E+a \in Sp(2n,R). \qquad (\leftrightarrow)$$

Теперь из равенства $E + x \circ y = (E+x)(E+y)$ (x, y – любые матрицы из $M(2n,R)$) и эквиваленций $(\leftrightarrow)$ очень просто усматривается изоморфность отображения
$Sp^{\circ}(2n,R) \to Sp(2n,R),\ a \to E + a.$
А это говорит о том, что введенная $Sp^{\circ}(2n,R)$ в случае R с 1 совпадает с обычной симплектической группой $Sp(2n,R)$.

Приводим теперь примеры коммутативных полулокальных колец без 1. Пусть $J(\Lambda)$ означает радикал Джекобсона ассоциативного кольца Λ. Включая и безъединичный случай, кольцо Λ назовем *полулокальным*(*локальным*), если его фактор по радикалу Джекобсона $\Lambda / J(\Lambda)$ образует прямую сум-му конечного числа полных матричных колец над телами (соответственно тело). Ясно, что в случае коммутативного полулокального Λ фактор $\Lambda / J(\Lambda)$ будет изоморфен прямой сумме конечного числа полей.

Начиная отсюда всюду R считается произвольным коммутативным по-лукальным кольцом не обязательно с 1 и $J = J(R)$ радикалом Джекобсона этого кольца. Нашим объектом исследования является обобщенная симплектичес- кая группа $Sp^{\circ}(2n,R)$, $n \geq 2$, над этим кольцом R.

3. Образующие элементы группы $Sp^{\circ}(2n,R)$

По определению для кольца R мы имеем $R / J \cong k_1 \oplus \ldots \oplus k_m$, где k_i – некоторые поля ($i = 1, \ldots, m,\ m \geq 1$). Обозначим через R_i полный прообраз слагаемого k_i при естественном эпиморфизме

$$R \to \overline{R} = R / J, \quad x \to \overline{x} = x + J. \qquad (\,\overline{\ }\,)$$

Эти R_i образуют локальные подкольца в R и имеют (общие с R) радикалы J. Для кольца R очевидно разложение

$$R = R_1 + \ldots + R_m. \qquad (+)$$

В работе будут действовать следующие обозначения: для натурального k $I(k) = \{1,2,\ldots,k\}$ и $r(k)$ – наименьший положительный вычет числа k по модулю m; для номеров $i \in I(2mn)$ $R_i = R_{r(i)}$; для $i \in I(mn)$ e_i – некоторый (не важно какой) прообраз единицы $1_i \in k_i$ при эпиморфизме ($\overline{\ }$) и для любого $k \in I(2mn)$ $e_k = e_{r(k)}$; если иное не оговорено, то $\equiv$ – сравнение в R по модулю J; если $k \in I(2mn)$, то

$k^* = k + mn$ при $k \le mn$ и $k^* = k - mn$ при $k > mn$; $A = \{ < i,\ j > \in I(2mn) \times I(2mn) : i \equiv j (mod\, m) \,\&\, i \ne j \}$; для номеров $i \in I(mn)$ $P_i = \{ j \in I(2mn) :\ < i,\ j > \in A \,\&(i < j \le mn \vee j \ge i^*)\}$, $Q_i = \{ j \in I(2mn) : < i, j > \in A \,\&$ $(i \ne j \le mn \vee j \ge i^*)\}$; для пары $< i, j > \in A$ ε_{ij} $-$оператор, действующий на R (слева) как: $j = i^* \to \varepsilon_{ij}\alpha = 0,\quad j \ne i^* \,\&(i \le mn < j \vee j \le mn < i) \to \varepsilon_{ij}\alpha = \alpha, (i, j \le mn \vee$ $i, j > mn) \to \varepsilon_{ij}\alpha = -\alpha$; и, наконец, для номеров $i, j \in I(2mn)$ и элемента $\alpha \in R_i$ $(\alpha)_{ij}$ $-$ матрица порядка $2mn$, где на позиции $< i, j >$ стоит элемент α и все прочие позиции заполнены нулями.

Как показывает (+), элементы из $M(2n, R)$ наряду с обычными допуска- ют также «развернутые матричные» представления

$$a = (\tilde{a}_{ij})_{1 \le i, j \le 2mn},\ i \equiv j (mod\, m), \qquad (1)$$

где $\tilde{a}_{ij} \in R_i$. Представление в виде (1) вообще говоря, не однозначно (оно однозначно в том и только том случае, когда $m = 1$ или $J = \{0\}$). В наших рассуждениях как обычные, так и развернутые представления (1) матриц из $Sp^\circ(2n,R)$ одинаково будут использованы.

Для введенных выше локальных слагаемых R_i имеют место дизъюнктные разложения

$$R_i = (-\bar{e}_i) \cup R_i^\circ,\ \ i = 1, \ldots, m \qquad (\cup)$$

(доказательство этого факта для любого локального кольца содержится в [6], с 15). Далее, элементы из J будем называть *радикальными* элементами.

Пользуясь образующими обычной симплектической группы $Sp(2n,R)$, приведенными в [7] (для случая коммутативного полулокального R с 1), сос- тавим следующие (симплектически элементарные) матрицы:

$$d_k(\varepsilon) = (\varepsilon)_{kk} + (\varepsilon')_{k^*k^*},\ \varepsilon \in R_k^\circ,\ \ k \in I(2mn),$$

$$t_{ij}(\alpha) = (\alpha)_{ij} + (\varepsilon_{ij}\alpha)_{j^*i^*},\ \alpha \in R_i, < i, j > \in A.$$

Для последних матриц верна формула $t_{ij}(\alpha) = t_{j^*i^*}(\varepsilon_{ij}\,\alpha)$ при всех $< i, j > \in A,\ j \ne i^*$. Покажем, что матрицы $d_k(\varepsilon), t_{ij}(\alpha)$ входят в $Sp^\circ(2n,R)$ (они и будут сос-тавлять там «внутренние» образующие). Действительно, возьмем произвольно матрицу $X \in GL^\circ(n,R)$ и симметрическую матрицу Y из $M(n,R)$. Как легко проверить, составленные по ним (клеточные) матрицы

$$a = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & (X')^T \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix}$$

удовлетворяют условиям (Sp°), и, поэтому, являются некоторыми элементами из $Sp^\circ(2n,R)$. Включения $d_k(\varepsilon), t_{ij}(\alpha) \in Sp^\circ(2n,R)$ теперь очень просто следуют из того, что матрицы $t_{ij}(\alpha)$ при $i, j \le mn$ или $i, j > mn$ и $d_k(\varepsilon)$ имеют вид a, и $t_{ij}(\alpha)$ же в прочих случаях – либо вид b, либо же вид c. Для квазиобратных этих симплектических матриц имеют место формулы $d_k'(\varepsilon) = d_k(\varepsilon'), t_{ij}'(\alpha) =$ $t_{ij}(-\alpha)$.

Введем к рассмотрению еще один тип матриц из $Sp^\circ(2n,R)$ специального вида. А именно, ниже под записью, (is), где $i \in I(mn)$, $s \in P_i$, мы условимся понимать некоторые слова вида, $t_{is}(\chi) \circ t_{si}(\pi)$,где аргументы χ, π связаны соотношением $\chi\pi \equiv -e_i$.

«Внутренние» матрицы (is) в наших рассуждениях будут играть роль обычных матриц-транспозиций. Их мы для равных индексов доопределяем как $(ii)=0$.

Повторяя классические рассуждения, показывается поражаемость группы $Sp^{\circ}(2n,R)$ элементарными матрицами

$$t_{ij}(\alpha), \alpha \in R_i, <i,j> \in A; \quad d_k(\varepsilon),\ \varepsilon \in R_k^{\circ},\ k \in I(2mn). \qquad (2)$$

Соотношения группы $Sp^{\circ}(2n, R)$

Прежде чем приступить к написанию этих соотношений, вводим для индексов $i \in I(2mn)$ числа $p(i)=m\setminus[i-r(i)]+1$ (по-другому $p(i)-$ это номер диагональной клетки в разбиении матрицы (1) на клетки порядка m, куда входит индекс i). Вводим к рассмотрению также операторы $[\ ]_{ij}$ на R, $i,j \in I(2mn)$, определенные как

$$[\alpha]_{ij} = \begin{cases} \alpha, \text{ если } p(i)=p(j), \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Для группы $Sp^{\circ}(2n, R)$ в алфавите (2) имеют место следующие соотношения:

1. $d_k(\varepsilon)\circ d_k(\sigma)=d_k(\varepsilon\circ\sigma)$;
2. $d_i(\varepsilon)\circ d_k(\sigma)=d_k(\sigma)\circ d_i(\varepsilon),\ i \neq k$;
3. $t_{ij}(\alpha)\circ d_k(\varepsilon)=d_k(\varepsilon)\circ t_{ij}(\alpha+\alpha x)$,

где $x=[\varepsilon']_{ik}\circ[\varepsilon]_{jk}\circ[\varepsilon]_{ik^*}\circ[\varepsilon']_{jk^*}$;

4. $t_{ij}(\alpha)\circ t_{ij}(\beta)=t_{ij}(\alpha+\beta)$;
5. $t_{ik}(\alpha)\circ t_{kj}(\beta)=t_{kj}(\beta)\circ t_{j^*j}(-\varepsilon_{kj}[\alpha\beta^2]_{ik^*})\circ t_{ij}(x)\circ t_{ii^*}(-\varepsilon_{ik}[\alpha^2\beta]_{jk^*})\circ t_{ik}(\alpha),\ i \neq j$,

где $x=\alpha\beta$ при $j \neq i^*$ и $x=2\alpha\beta$ при $j=i^*$;

6. $t_{ik}(\alpha)\circ t_{rj}(\beta)=t_{rj}(\beta)\circ t_{ik}(\alpha),\ \{i^*,k\}\cap\{r,j^*\}=\varnothing,\ |\{i,k,r,j\}|\geq 3$;
7. $t_{ik}(\alpha)=t_{k^*i^*}(\varepsilon_{ik}\alpha), k^* \neq i$;
8. $t_{ik}(\alpha)\circ t_{ki}(\beta)=d_i(\sigma)\circ d_k(\varepsilon_{ik}^2\sigma')\circ t_{ki}(\beta+\sigma\beta)\circ t_{ik}(\alpha+\sigma'\alpha),\ i<k, \sigma=\alpha\beta \not\equiv -e_i$;
9. для аргументов $a \in J\setminus\{0\}$

a) $d_k(a)=d_{mp(k)}(a), k<mp(k)$,

b) $t_{rj}(a)=t_{mp(r),mp(j)}(a), r<mp(r)$;

10. для номеров $i \leq mn,\ i^* \neq s \in P_i$ и аргументов $\alpha,\chi,\pi \in R_i, \alpha \not\equiv 0, \chi\pi \equiv -e_i$,

$$t_{is}(\alpha)\circ t_{ii^*}(\chi)\circ t_{i^*i}(\pi)=d_i(\sigma)\circ t_{s^*i}(\varepsilon_{is}\alpha\pi)\circ t_{si}(-\alpha)\circ t_{i^*i}(\pi+\sigma\pi-\alpha^2\pi)\circ d_s(\tau)\circ t_{s^*s}(d+\tau d)$$
$$\circ t_{ss^*}(c(\alpha+\tau'\alpha))\circ t_{s^*s}(\alpha)\circ t_{ii^*}(b)\circ t_{is^*}(c)\circ t_{is}(\alpha+\sigma'\alpha)\circ t_{si}(\alpha),$$

где $\sigma=\chi\pi-\alpha^2, b=\chi+\sigma'\chi+\chi(\alpha+\sigma'\alpha)^2, \tau=\alpha(\alpha+\sigma'\alpha)-\alpha^2c, c=-\varepsilon_{is}\chi(\alpha+\sigma'\alpha)$,

$d=-\alpha-a-\sigma'a,\ a=\alpha^5-\alpha^3+\varepsilon_{is}\alpha^2\pi$;

11. для номеров $i \leq mn,\ \ s,\ p \in P_i,\ \ p \neq s, s^*,\ i^*,\ \ s \neq i^*$, и аргументов $\alpha,\chi,\pi \in R_i,\ \alpha \not\equiv 0, \chi\pi \equiv -e_i$,

$$t_{is}(\alpha)\circ t_{ip}(\chi)\circ t_{pi}(\pi)=d_i(\sigma)\circ t_{si}(-\alpha)\circ t_{pi}(\pi)\circ d_s(\tau)\circ t_{ps}(b)\circ d_p(\varepsilon)\circ t_{sp}(\chi c)\circ t_{ps}(\alpha)\circ$$
$$t_{ip}(\chi+\sigma'\chi)\circ t_{is}(\alpha+\sigma'\alpha)\circ t_{si}(\alpha),$$

где $\sigma=\chi\pi-\alpha^2,\ \tau=\alpha(\alpha+\sigma'\alpha)-\chi\alpha(\alpha+\sigma'\alpha), b=\chi\pi(\alpha+\sigma'\alpha)-\pi(\alpha+\sigma'\alpha)-\alpha,\ \ \varepsilon=-\chi\pi-\chi\pi\sigma'-\chi bc,\ c=\alpha+\sigma'\alpha+\tau'(\alpha+\sigma'\alpha)$;

12. для номеров $i, k, \quad k \in P_i, \left|\overline{R}_i\right| = 2$

$$t_{ik}(e_i) \circ t_{ki}(e_i) \circ t_{ik}(e_i) \circ t_{ki}(e_i) = d_i(\sigma) \circ d_k(\varepsilon_{ik}^2 \sigma') \circ t_{ki}(y) \circ t_{ik}(x),$$

где $\sigma = 3e_i^2 + e_i^4 (\equiv 0),\ x = a + \sigma' a\ (\equiv e_i),\ y = a + \sigma a\ (\equiv e_i),\ a = 2e_i + e_i^3$.

В приведенном списке соотношения 1, 9 очевидны, а правильность 4 проверяется непосредственно.

Основной результат работы сформулируется как

Теорема. *Обобщенная симплектическая группа* $Sp^{\circ}(2n, R), n \geq 2$, *над коммутативным полулокальным кольцом* R *в образующих* (2) *представляется соотношениями* 1 – 12.

Доказательство использует, как мы отметили в начале, метод трансформации и проводится аналогично работе [5]. Подробности здесь мы опускаем.

Литература:

1. **Носков, Г.А**. Порождающие элементы и определяющие соотношения симплектическихгрупп над некоторыми кольцами [Текст] / Г.А. Носков // М.- 1974.- С. 237 – 246.
2. **Сатаров, Ж.С.** Образующие и определяющие соотношения обобщеннойполной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы. [Текст] / Ж.С. Сатаров // Изв. вузов. Математика – Бишкек - 2006. №10 - С.59 – 67
3. **Сатаров, Ж.С.** Образующие и определяющие соотношения обобщеннойполной линейной группы над полулокальнымикольцами без единицы [Текст] / Ж.С. Сатаров // Изв. вузов. Математика – Бишкек 2006. №11 - С. 33 – 41.
4. **Сатаров, Ж.С.** Определяющие соотношения обобщенных ортогональныхгрупп над коммутативными локальными кольцами без единицы [Текст] / Ж.С. Сатаров // Изв. вузов. Математика – Бишкек - 2000. №6 - С. 24 –32.
5. **Сатаров Ж.С.** Образующие и соотношения обобщенной ортогональной группы над коммутативными полулокальными кольцами без единицы[Текст] / Ж.С. Сатаров //Изв. вузов. Математика - Бишкек - 2007. №7. С.61–70.
6. **Сатаров, Ж.С.** Образующие элементы и определяющие соотношения в линейных группах [Текст] / Ж.С. Сатаров //Дисс.докт. физ.-матем. наук. Ош, 1998. – 232с.
7. **Дыбкова, Е.В.** О некоторых конгруэнцподгруппахсимплектической группы [Текст] / Е.В. Дыбкова//Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин – та АН СССР. 1976. Т. 64.- Ош С. 80 – 91.