УДК 517.968

Ж. А. Зулпукаров, Г.А. Осекова – к.ф.-м.н. ОшТУ,ст.преп.ОшТУ
J. A. Zulpukarov, G. Osekova – d.ph.-m.s., OshTU, senior teacher OshTU

ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В данной статье рассматриваются методы и механизмы решения основной научной проблемы: выбор параметра регуляризации линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с тремя независимыми переменными в функциональном пространстве $L_2(G)$. Решение такой научной задачи до этого времени рассматривался только для двух переменных.

Ключевые слова: линейное интегральное уравнения Вольтера, уравнения первого ряда, функция, пространства.

CHOICE OF PARAMETER OF REGULARIZATION OF LINEAR FIRST ORDER INTEGRAL EQUATION OF VOLTER WITH THREE INDEPENDENT VARIABLES

It is considered methods and mechanism of solving of basic problem: to choice of parameter of regularization of first order linear integral equation of Volterra with three independent variables in function space $L_2(G)$. A solution of such kind of problem up to now considered only for two variables.

Keywords: linear integral Volter equations, the first row, the function of the space.

Рассмотрим уравнения

$$\int_0^t K(t,x,y,s)u(s,x,y)ds + \int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)u(s,z,y)dzds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)u(s,z,w)dwdzds = f(t,x,y),(t,x,y)\in G \qquad (1)$$

где $K(t,x,y,s)$, $N(t,x,y,s,z)$ и $M(t,x,y,s,z,w)$ – функции, а $u(t,x,y)$ и $f(t,x,y)$ – соответственно искомая и заданная функции в области $G=\{(t,x,y):\ 0\le t\le T, 0\le x\le X, 0\le y\le Y\}$.

Различные вопросы для интегральных уравнений Вольтерра первого рода исследовались в [1-2]. В частности, в [3] для нелинейных интегральных уравнений Вольтера первого рода с гладкими ядрами доказано существование многопараметрического семейства решений. В [3] изучены вопросы регуляризации и единственности решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными. Здесь $K(t,x,y,s)$, $N(t,x,y,s,z)$ и $M(t,x,y,s,z,w)$ могут быть негладкими.

Потребуем выполнение следующих условий:

а) $\|K(t,x,y,s)\|\in C(G_1),\ \|N(t,x,y,s,z)\|\in C(G_2),\ \|M(t,x,y,s,z,w)\|\in C(G_3)$,

$\|K(t,x,y,t)\|\le N_0\lambda_0(t)$ и $\lambda(t,x,y)\ge\lambda_0(t)\ge 0$ при $(t,x,y)\in G$; $0<N_0$ –const, $\lambda_0(t)\in L_1(0,T)$,

$G_1=\{(t,x,y,s):\ 0\le s\le t\le T,\ 0\le x\le X,\ 0\le y\le Y\}$,

$G_2=\{(t,x,y,s,z):\ 0\le s\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le y\le Y\}$,

$G_3=\{(t,x,y,s,z,w):\ 0\le s\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le w\le y\le Y\}$;

б) При $t>\tau$ для любых $(t,x,y,s),(\tau,x,y,s)\in G_1$ справедливо

$$\|K(t,x,y,s)-K(\tau,x,y,s)\|\le C\int_{\tau}^{t}\lambda_0(s)ds\,,$$

где $0<C$ – некоторая постоянная;

в) При $t>\tau$ для любых $(t,x,y,s,z),(\tau,x,y,s,z)\in G_2$ справедливо

$$\|N(t,x,y,s,z)-N(\tau,x,y,s,z)\|\le C_1\int_{\tau}^{t}\lambda_0(s)ds\,,$$

где $0<C_1$ – некоторая постоянная и $N(t,x,y,t,z)\equiv 0$ при $(t,x,y,z)\in G_4=\{(t,x,y,z):\ 0\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le y\le Y\}$;

г) При $t>\tau$ для любых $(t,x,y,s,z,w),(\tau,x,y,s,z,w)\in G_3$ справедливо

$$\|M(t,x,y,s,z,w)-M(\tau,x,y,s,z,w)\|\le C_2\int_{\tau}^{t}\lambda_0(s)ds\,,$$

где $0<C_2$– некоторая постоянная и $M(t,x,y,t,z,w)\equiv 0$ при $(t,x,y,z,w)\in G_5=\{(t,x,y,z,w):\ 0\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le w\le y\le Y\}$;

д) Вместо точной правой части $f(t,x,y)$ задано ее приближенное значение $f_\delta(t,x,y)$ из $C(G)$ такое, что

$\|f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)\|_C\le\delta,\ \delta>0$, $(t,x,y)\in G$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\varepsilon u_\varepsilon(t,x,y)+\int_0^t K(t,x,y,s)u_\varepsilon(s,x,y)ds+\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)u_\varepsilon(s,z,y)dzds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)u_\varepsilon(s,z,w)dwdzds=f(t,x,y)+\varepsilon u(0,x,y),\quad (t,x,y)\in G\,,\qquad (2)$$

и приближенно уравнение

$$\varepsilon u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)+\int_0^t K(t,x,y,s)u_{\varepsilon\delta}(s,x,y)ds+\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)u_{\varepsilon\delta}(s,z,y)dzds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)u_{\varepsilon\delta}(s,z,w)dwdzds=f_\delta(t,x,y)+\varepsilon u_\delta(0,x,y),\qquad (t,x,y)\in G\,,\qquad (3)$$

где $0<\varepsilon$ – малый параметр, $u(t,x,y)$ – решение (1) и начальные условия решений уравнений (1) и (3) связаны между собой следующим образом

$$\|u(0,x,y)-u_\delta(0,x,y)\|\le C^1\sqrt{\delta},\ x\in[0,X],y\in[0,Y]\qquad (4)$$

где $0<C^1$– некоторая постоянная.

Из (2) полученного отнимаем (3) имеем

$$\varepsilon[u_\varepsilon(t,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)]+\int_0^t K(t,x,y,s)[u_\varepsilon(s,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,x,y)]ds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)[u_\varepsilon(s,z,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,y)]dzds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)[u_\varepsilon(s,z,w)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,w)]dwdzds=$$

$$=f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)+\varepsilon[u(0,x,y)-u_\delta 0,x,y)].\qquad (5)$$

Уравнение (5) преобразуем к следующему виду

$$u_\varepsilon(t,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,y,s)[u_\varepsilon(s,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,x,y)]ds=$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [K(t,x,y,s)-K(s,x,y,s)](u_\varepsilon(s,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,x,y))ds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)[u_\varepsilon(s,z,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,y)]dzds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)[u_\varepsilon(s,z,w)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,w)]dwdzds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}[f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)]+u(0,x,y)-u_\delta(0,x,y).$$

Отсюда, применив, резольвенту ядра $\left[-\frac{1}{\varepsilon}K(s,x,y,s)\right]$, имеем

$$u_\varepsilon(t,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)=\int_0^t H(t,x,y,s,\varepsilon)[u_\varepsilon(s,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,x,y)]ds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x N_1(t,x,y,s,z,\varepsilon)[u_\varepsilon(s,z,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,y)]dzds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M_1(t,x,y,s,z,w)[u_\varepsilon(s,z,w)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,w)]dwdzds+F(t,x,y,\varepsilon)+U(t,x,y,\varepsilon),\ (t,x,y)\in G \quad (6)$$

где $$H(t,x,y,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,y,s,\varepsilon)[K(t,x,y,s)-K(s,x,y,s)]-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t X(t,x,y,\tau,\varepsilon)K(\tau,x,y,\tau)[K(t,x,y,s)-K(\tau,x,y,s)]d\tau.\ (t,x,y)\in G \quad (7)$$

$$N_1(t,x,y,s,z,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,y,s,\varepsilon)N(t,x,y,s,z)-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t X(t,x,y,\tau,\varepsilon)K(\tau,x,y,\tau)\times$$

$$\times[N(t,x,y,s,z)-N(\tau,x,y,s,z)]d\tau. \qquad (t,x,y)\in G \quad (8)$$

$$M_1(t,x,y,s,z,w,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,y,s,\varepsilon)M(t,x,y,s,z,w)-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t X(t,x,y,\tau,\varepsilon)\times$$

$$\times K(\tau,x,y,\tau)[M(t,x,y,s,z,w)-N(\tau,x,y,s,z,w)]d\tau. \qquad (t,x,y)\in G \quad (9)$$

$$F(t,x,y,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}[f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)]-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t X(t,x,y,s,\varepsilon)K(s,x,y,s)\times$$

$$\times[f(s,x,y)-f_\delta(s,x,y)]ds,(t,x,y)\in G \quad (10)$$

$$U(t,x,y,\varepsilon)=u(0,x,y)-u_\delta(0,x,y)-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t X(t,x,y,s,\varepsilon)K(s,x,y,s)\times$$

$$\times[u(0,x,y)-u_\delta(0,x,y)]ds. \qquad (t,x,y)\in G \quad (11)$$

В дальнейшем используем следующие оценки.

Как показано в леммах [4] в силу условия *а), б), в), г), д)* для функций $H(t,x,y,\varepsilon)$, $N_1(t,x,y,s,\varepsilon)$ и $M_1(t,x,y,s,z,w,\varepsilon)$ соответственно справедливо

$$\|H(t,x,y,s,\varepsilon)\|\le C_3,\quad (t,x,y,s)\in G_1,\quad \varepsilon>0 \quad (12)$$

$\|N_1(t,x,y,s,z,\varepsilon)\| \le C_4$, $\quad$ *(t,x,y,s,z)* $\in G_2$, ε>0 $\qquad$ (13)

$\|M_1(t,x,y,s,z,w,\varepsilon)\| \le C_5$, $\quad$ *(t,x,y,s,z,w)* $\in G_3$, ε>0 (14)

где $C_3 = C\sqrt{n}(e^{-1}+N_0)$, $C_4 = C_1\sqrt{n}(e^{-1}+N_0)$, $C_5 = C_2\sqrt{n}(e^{-1}+N_0)$, $N_0>0$

$G_1=\{(t,x,y,s):\ 0\le s\le t\le T,\ 0\le x\le X,\ 0\le y\le Y\}$, $G_2=\{(t,x,y,s,z):\ 0\le s\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le y\le Y\}$, $G_3=\{(t,x,y,s,z,w):\ 0\le s\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le w\le y\le Y\}$.

Перейдем к оценке $F(t,x,y,\varepsilon)$ и $U(t,x,y,\varepsilon)$.

Лемма 1. Пусть функция $F(t,x,y,\varepsilon)$ определена формулой (10) и выполняется условие *д)*. Кроме того, $\lambda_0(t)>0$ при почти всех $t\in[0,T]$. Тогда для $F(t,x,y,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\|F(t,x,y,\varepsilon\| \le \frac{\delta}{\varepsilon}(1+N_0\sqrt{n}),\ \varepsilon>0,\quad (t,x,y)\in G \qquad (15)$$

Доказательство: Действительно, из (10) имеем

$$\|F(t,x,y,\varepsilon)\| \le \frac{\|f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)\|_C}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2}\left\|\int_0^t X(t,x,y,s,\varepsilon)K(s,x,y,s)\times\right.$$

$$\left.\times[f(s,x,y)-f_\delta(s,x,y)]\right\|ds \le \frac{\|f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)\|_C}{\varepsilon} + \frac{\|f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)\|_C}{\varepsilon}\times$$

$$\times\frac{N_0\sqrt{n}}{\varepsilon}\int_0^t \|X(t,x,y,s,\varepsilon)\|\|K(s,x,y,s)\|ds \le \frac{\|f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)\|_C}{\varepsilon}\times$$

$$\times[1+\frac{N_0\sqrt{n}}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_0(\tau)d\tau}\lambda_0(s)ds] = \frac{\delta}{\varepsilon}(1+\sqrt{n}N_0).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть функция $U(t,x,y,\varepsilon)$ определена формулой (11), при этом функции $u(0,x,y)$ и $u_\delta(0,x,y)$ связаны между собой следующим образом $|u(0,x,y)-u_\delta(0,x,y)| \le C^1\sqrt{\delta}$, $x\in[0,X], y\in[0,Y]$. Кроме того, $\lambda_0(t)>0$ при всех $t\in[0,T]$. Тогда для $U(t,x,y,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\|U(t,x,y,\varepsilon)\| \le C^1\sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n}),\quad \varepsilon>0,\quad (t,x,y)\in G \qquad (16)$$

где $0<C^1$ – некоторая постоянная, не зависящая от ε и δ.

Доказательство: аналогично доказательству предыдущей леммы 1.

В силу оценок (12), (13), (14), (15) и (16), из (6) имеем

$$|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)| \le a(t,x,y,\varepsilon,\delta) + \int_0^t C_6|V(s,x,y,\varepsilon,\delta)|ds, \qquad (17)$$

где $V(t,x,y,\varepsilon,\delta) = u_\varepsilon(t,x,y) - u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)$,

$$a(t,x,y,\varepsilon,\delta) = \sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1) + \int_0^t\int_0^x C_7|V(s,z,y,\varepsilon,\delta)|dzds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_8|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)|dwdzds. \qquad (18)$$

На основании леммы [4] из (17) получим

$$|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)| \le a(t,x,y,\varepsilon,\delta) + \int_0^t C_6 e^{C_6(t-s)}a(s,x,y,\varepsilon,\delta)ds.$$

Вместо $a(t,x,y,\varepsilon,\delta)$ положим выражение (18) и из последнего неравенства имеем

$$\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\| \le \sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)+\int_0^t\int_0^x C_7|V(s,z,y,\varepsilon,\delta)|dzds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_8|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)|dwdzds+\int_0^t C_6 e^{C_6(t-s)}\{\sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)+$$

$$+\int_0^s\int_0^x C_7|V(s_1,z,y,\varepsilon,\delta)|dzds_1+\int_0^s\int_0^x\int_0^y C_8|V(s_1,z,w,\varepsilon,\delta)|dwdzds_1\}ds.$$

Последнее неравенство интегрируем и применим формулу Дирихле, затем заменив tнаT пишем в виде

$$|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)| \le \sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)e^{C_6T}+\int_0^t\int_0^x C_7e^{C_6T}|V(s,z,y,\varepsilon,\delta)|dzds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_8e^{C_6T}|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)|dwdzds. \qquad (19)$$

Неравенство (19) применим лемму [4] и, применяя формулу Дирихле, имеем

$$\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\| \le \sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)e^{C_6T}[1+\int_0^t\int_0^x R(t,x,s,z)dzds]+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y[C_8e^{C_6T}+\int_0^s\int_0^z C_7e^{C_6T}R(t,x,s_1,z_1)dz_1ds_1]|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)|dwdzds, \qquad (20)$$

где $R(t,x,s,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_7e^{C_6T}\right)^{n+1}\dfrac{(t-s)^n(x-z)^n}{(n!)^2}$.

Из (20) получим следующее неравенство

$$|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)| \le C_9(\varepsilon,\delta)+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_{10}|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)|dwdzds, \qquad (21)$$

где $C_9(\varepsilon,\delta)=\sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)e^{C_6T}[1+R(T,X,0,0)TX]$, $C_{10}=C_7e^{C_6T}[1+R(T,X,0,0)TX]$.

На (21) применив лемму [4], получим

$$|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)| \le C_9(\varepsilon,\delta)+\int_0^t\int_0^x\int_0^y R_1(t,x,y,s,z,w)C_{10}dwdzds, \qquad (22)$$

где $R_1(t,x,y,s,z,w)=\sum_{n=0}^{\infty}(C_8e^{C_6T})^{n+1}\dfrac{(t-s)^n(x-z)^n(y-w)^n}{(n!)^3}$.

Таким образом, (22) получим следующую оценку

$$\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\|_C \le \sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)C_{11}, \qquad (23)$$

где $C_{11}=e^{C_6T}[1+R(T,X,0,0)TX][1+R_1(T,X,Y,0,0,0)TXY]$.

Теперь рассмотрим уравнение (2). Его решение будем искать в виде

$u_\varepsilon(t,x,y)=u(t,x,y)+\xi_\varepsilon(t,x,y)$, $\quad (t,x,y)\in G \qquad (24)$

где $u(t,x,y)$ – решение уравнение (1).

Подставляя (24) в (2) и после элементарных преобразований имеем

$$\xi_\varepsilon(t,x,y)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,y,s)\xi_\varepsilon(s,x,y)ds=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t[K(t,x,y,s)-K(s,x,y,s)]\times$$

$$\times\xi_\varepsilon(s,x,y)ds-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)\xi_\varepsilon(s,z,y)dzds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)\xi_\varepsilon(s,z,w)dwdzds-u(t,x,y)+u(0,x,y)\,. \qquad (25)$$

Далее, в силу условия *а), б), в), г), д)* и теоремы [4] из (25) имеем

$$\left|\xi_\varepsilon(t,x,y)\right|\le C_{12}C_0(\varepsilon), \qquad (t,x,y)\in G \qquad (26)$$

где $C_0(\varepsilon)=6\left\|u(t,x,y)\right\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}+\omega_{\bar u}(\varepsilon^\beta),\ 0<\beta<1,$

$C_{12}=e^{C_6T}[1+R(T,X,0,0)TX][1+R_1(T,X,Y,0,0,0)TXY]$,

$\omega_{\bar u}(\varepsilon^\beta)=\sup\limits_{|\upsilon-\upsilon_0|<\delta}\left|u(\varphi^{-1}(\upsilon),x,y)-u(\varphi^{-1}(\upsilon_0),x,y)\right|,$

$\varphi^{-1}(\upsilon)$ - обратная функция к функции $\upsilon=\varphi(t)=\int_0^t\lambda_0(s)ds>0$.

Если ε выбираем в виде $\varepsilon=\sqrt{\delta}$, то в силу (26) и (23) имеет место

$$\left\|u(t,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)\right\|_C\le\left\|u(t,x,y)-u_\varepsilon(t,x,y)\right\|_C+\left\|u_\varepsilon(t,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)\right\|_C\le$$

$$\le 6\left\|u(t,x,y)\right\|_C e^{-\frac{1}{\delta^{\frac{1}{2}(1-\beta)}}}+\omega_{\bar u}(\delta^{\frac{1}{2}\beta})+\sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(1+C^1), \qquad (27)$$

Таким образом, доказана следующая теорема

Теорема. Пусть выполняются условия *а*)-*д*) уравнение (1) имеет непрерывное решение $u(t,x,y)$ на $C(G)$. Тогда решение $u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)$ уравнения (3) для $\varepsilon=\sqrt{\delta}$ сходится к непрерывному решению уравнения (1) в области *G* при $\delta\to 0$ и справедлива оценка (27).

Литература:

1. **Денисов, А.М.** О приближенном решении уравнения Вольтерра первого рода, связанного с одной обратной задачей для уравнения теплопроводности [Текст] / А.М. Денисов // Вестн. Моск. унив-та, Сер.15 Вычисл. матем. и киберн.-М.-1980.-С.49-52.
2. **Зулпукаров, Ж. А.**Нелинейное интегральное интегральных уравнений Вольтерра первого рода с тремя независимыми переменными [Текст] / Ж.А. Зулпукаров// Математический журнал, Алматы 2012.Том 12., №2,С.87-101
3. **Иманалиев, М.И., Асанов А.** О решениях систем нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / М.И. Иманалиеа, А. Асанов // Докл. АН СССР-М.-1991, Т. 317, №1,С.22-35.
4. **Магницкий, Н.А.** Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода [Текст] / Н.А. Магицкий // Вычисл. матем. и матем. Физики-М.-1979,Т. 19, №4-С.970-988