УДК 621.01

Э.С. Темирбеков - д.т.н., проф АТУ, Казахстан
E.S.Temirbekov – d.t.s., Prof ATU, Kazakhstan

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДИКИ УЧЕТА ОРИЕНТАЦИИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В статье дается обоснование подхода [1], который позволяет использовать мкэ для анализа жесткости и соответственно прочности рм с кинематическими парами (кп) произвольной ориентации в пространстве.

Ключевые слова: рычаг, механизм, расчет жесткости и прочности, вектор.

SUBSTANTIATION OF A TECHNIQUE ACCORDING TO THE ORIENTATION OF KINEMATIC PAIRS LEVER MECHANISM FINITE ELEMENT METHOD

The article gives the rationale for the approach [1], which allows you to use the finite element method to analyze the stiffness and strength of the republic of Moldova respectively with kinematic pairs (kp) of an arbitrary orientation in space.

Keywords: a lever mechanism, the calculation of rigidity and strength vector.

Как известно, расчет жесткости и прочности пространственных конструкций рычажных механизмов (РМ) с использованием метода конечных элементов (МКЭ) до сих пор является проблемой. Здесь дается обоснование подхода [1], который позволяет использовать МКЭ для анализа жесткости и соответственно прочности РМ с кинематическими парами (КП) произвольной ориентации в пространстве. Идея предлагаемого метода заключается в том, что основное уравнение равновесия решается методом жестких узлов [1] в локальных системах координат пар.

В КП РМ есть перемещения, совпадающие для "K" общих степеней свободы сходящихся в одной КП звеньев РМ, и есть перемещения, имеющие $(6-K)$ различных компонент по степеням свободы КП.

Пусть $U_i=(u_1^i,\dots,u_6^i)^T$ и $F_i=\left(f_1^i,\dots,f_6^i\right)^T$ $(i=1,\dots,m)$,- векторы упругих перемещений и внешних сил i-го узла в глобальной (ГСК) системе координат OXYZ. Они же в локальной системе координат (ЛСК) $O_i xyz$ i-го узла имеют вид - $\tilde{U}_i=\left(\tilde{u}_1^i,\dots,\tilde{u}_6^i\right)^T$ и $\tilde{F}_I=\left(\tilde{f}_1^i,\dots,\tilde{f}_6^i\right)^T$, m - общее количество узлов и пусть

$$\left[T_i^o\right]=\begin{bmatrix}\cos\left(X,\tilde{x}_i\right) & \cos\left(X,\tilde{y}_i\right) & \cos\left(X,\tilde{z}_i\right)\\ \cos\left(Y,\tilde{x}_i\right) & \cos\left(Y,\tilde{y}_i\right) & \cos\left(Y,\tilde{z}_i\right)\\ \cos\left(Z,\tilde{x}_i\right) & \cos\left(Z,\tilde{y}_i\right) & \cos\left(Z,\tilde{z}_i\right)\end{bmatrix}$$

- матрица направляющих косинусов ЛСК $O_i xyz$ i-го узла относительно ГСК OXYZ. Тогда для i-го узла конечно-элементной модели (КЭМ) выполняются уравнения:
$U_i=[T_i]\tilde{U}_i$, $F_i=[T_i]\tilde{F}_i$, $\tilde{U}_i=[T_i]^T U_i$, $\tilde{F}_i=[T_i]^T F_i$, $i=1,..m,$ где $[T_i]$ - это переход вектора из ЛСК i-го узла в ГСК имеет вид:

$$[T_i]=\begin{bmatrix}T_i^o & O\\ O & T_i^o\end{bmatrix}, i=1,\dots m.$$

Здесь $\left[T_i^0\right]$ - матрица направляющих косинусов, поэтому она есть и матрица вращения, откуда она ортогональна: $\left[T_i^0\right]^T = \left[T_i^0\right]^{-1}$. Следовательно, $\left[T_i\right]$ также ортогональная: $\left[T_i\right]^T = \left[T_i\right]^{-1}$. Пусть U и F векторы перемещений и узловых сил КЭМ в ГСК OXYZ:

$$U = (U_1, U_2, ..., U_m)^T = (u_1, u_2, ..., u_N)^T, F = (F_1, F_2, ..., F_m)^T = (f_1, f_2, ..., f_N)^T, \qquad (1)$$

N – число степеней свободы модели. Аналогично для ЛСК узлов КЭМ имеем:

$$\tilde{U} = (\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, ..., \tilde{U}_m)^T = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, ..., \tilde{u}_N)^T, \tilde{F} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, ..., \tilde{F}_m)^T = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, ..., \tilde{f}_N)^T, \qquad (2)$$

Тогда, очевидно, векторы (1) и (2) связаны уравнениями:

$$U_i = [T_i]\tilde{U}_i, \;\; F_i = [T_i]\tilde{F}_i, \; \tilde{U}_i = [T_i]^T U_i, \; \tilde{F}_i = [T_i]^T F_i \qquad (3)$$

где матрица $[T]$ имеет вид:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_1 & O & \dots & O \\ O & T_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & T_m \end{bmatrix}.$$

Покажем, что $[T]$ ортогональна:

$$[T]^T [T] = \begin{bmatrix} T_1^T & O & \dots & O \\ O & T_2^T & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & T_m^T \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} T_1 & O & \dots & O \\ O & T_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & T_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^T T_1 & O & \dots & O \\ O & T_2^T T_2 & \dots & O \\ ..... & ..... & \dots & ..... \\ O & O & \dots & T_m^T T_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O & \dots & O \\ O & E & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & E \end{bmatrix} = [E]$$

То есть $[T]$ имеет свойство ортогональности: $[T]^T \cdot [T] = [T] \cdot [T]^T = [E]$ или $[T]^T = [T]^{-1}$. Основное разрешающее уравнение равновесия имеет вид [2]:

$$[K] \cdot U = [F] \qquad (4)$$

где $[K]$ - матрица жесткости в ГСК OXYZ. Преобразуем его: $[T]^T [K] U = [T]^T [F]$ или

$[T]^T [K][E] U = [T]^T [F]$ или

$$[T]^T [K][T][T]^T U = [T]^T [F] \qquad (5)$$

Используя (3) можем (5) записать в виде: $[T]^T [K][T]\tilde{U} = [\tilde{F}]$, где $[\tilde{K}] = [T]^T [K][T]$- есть матрица жесткости КЭМ в ЛСК узлов. Тогда основное уравнение (4) эквивалентно уравнению:

$$[\tilde{K}][\tilde{U}] = [\tilde{F}], \qquad (6)$$

- это есть векторное уравнение равновесия КЭМ конструкции в ЛСК узлов, и вместо решения уравнения (4) ищем решение уравнения (6). Следовательно, предложенный метод является эквивалентным известному методу, основанному на решении (4). Это означает, что при реализации предлагаемого подхода основные принципы МКЭ и его реализация не изменяются.

Пример. Рассмотрим схему конструкции схвата грейфера. КЭМ состоит из 59 элементов, соединенных в 57 узлах (рис.1).

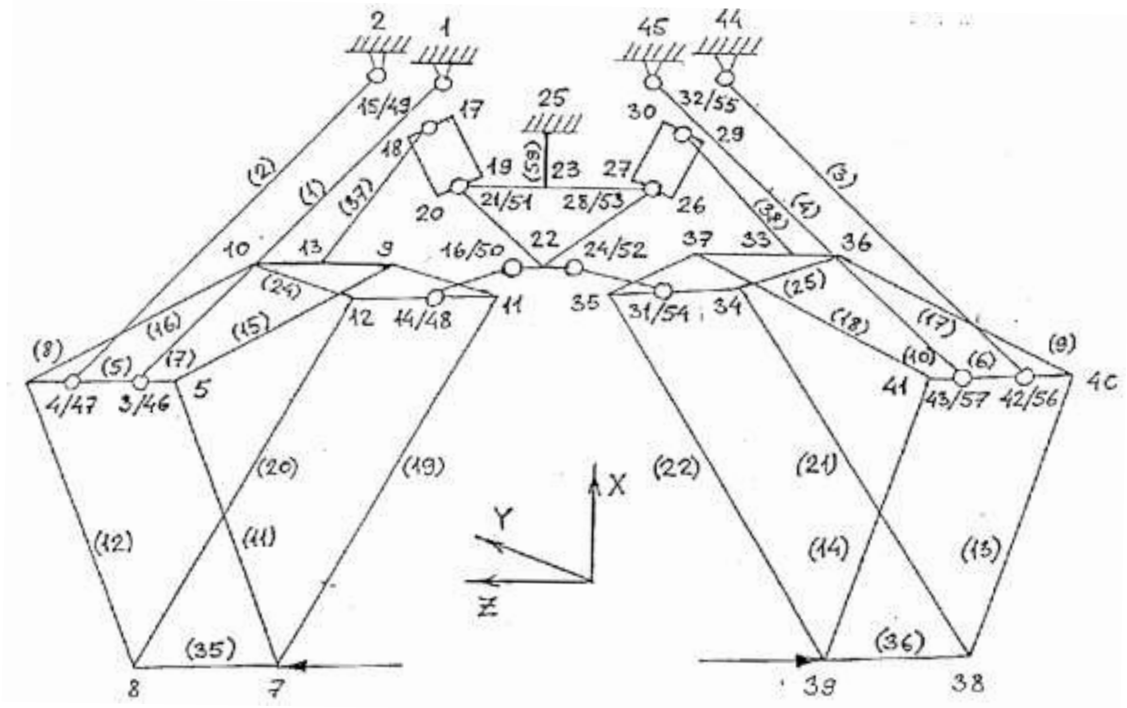

Рис. 1 – Модель схвата манипулятора

ГСК OXYZ выбрана так, чтобы ось OY была перпендикулярна плоскости схвата грейфера. В соответствие с КЭМ вводим матрицу ID [1,2] и координаты узлов. На конструкцию наложены граничные условия - фиксированные шарниры в узлах 1,2,44,45 и жестко закрепление в узле 25. Поэтому ID в узлах 1,2,44,45 имеют вид: $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, здесь «0» в 5- строке означает возможность поворота узла вокруг со «Y» и для узла 25 вид $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. КЭМ содержит 12 вращательных пар: узлы 3-46, 4-47, 14-48, 15-49, 16-50, 21-51, 24-52, 28-53, 31-54, 32-55, 42-56, 43-57 входят в шарнирное соединение друг с другом соответственно. То есть, эти узлы имеют общие координаты и общие 5 степеней свободы в парах (рис.1). Например, для пары узлов 3,46 строки ID имеют вид: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Здесь числа "3" в 46-й строке указывает, что соответствующие степени свободы 3 и 46-й узлов являются общими: для каждой из них составляют одно уравнение равновесия. "0" в 5-й позиции узла 46 указывает на разницу углов поворота 3-го и 46-го узла вокруг оси «Y». КЭМ нагружена силами в узлах 7 и 39 по 5кн, их направление показано на рисунке 1. Элементы КЭМ упругие с $E = 2 \cdot 10^6 н/м^2$, $\nu = 0.3$ и все имеют одинаковые сечения - кольцо с внешним и внутренним диаметрами: $\mathrm{D} = 0.03$м и $\mathrm{d} = 0.02$м .

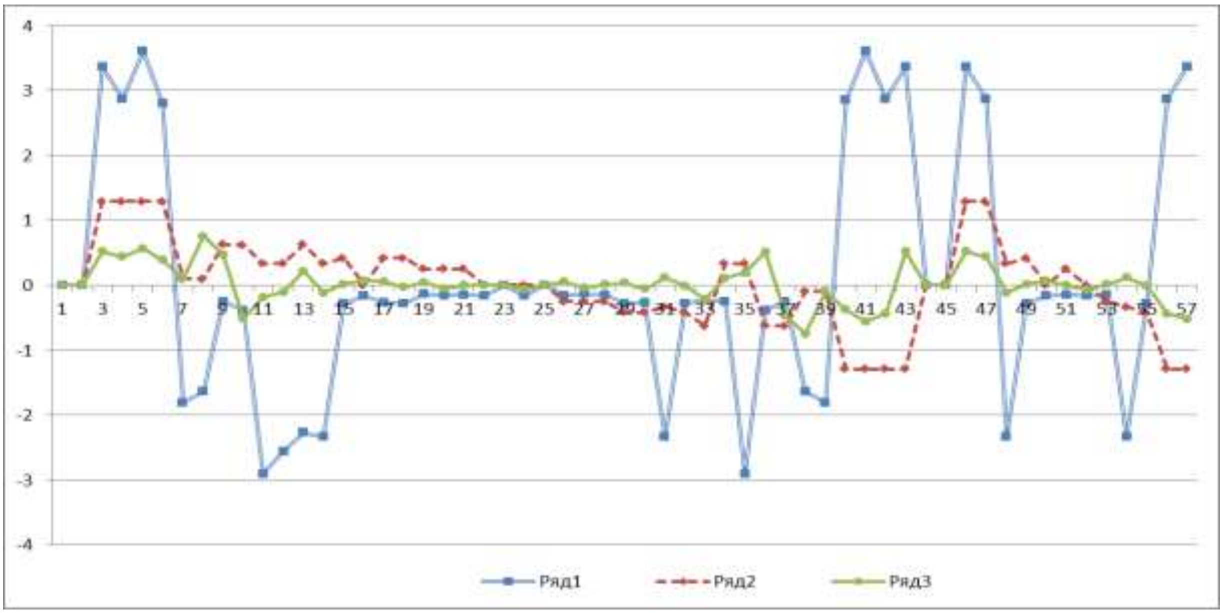

Рис. 2 – Линейные упругие перемещения модели схвата грейфера

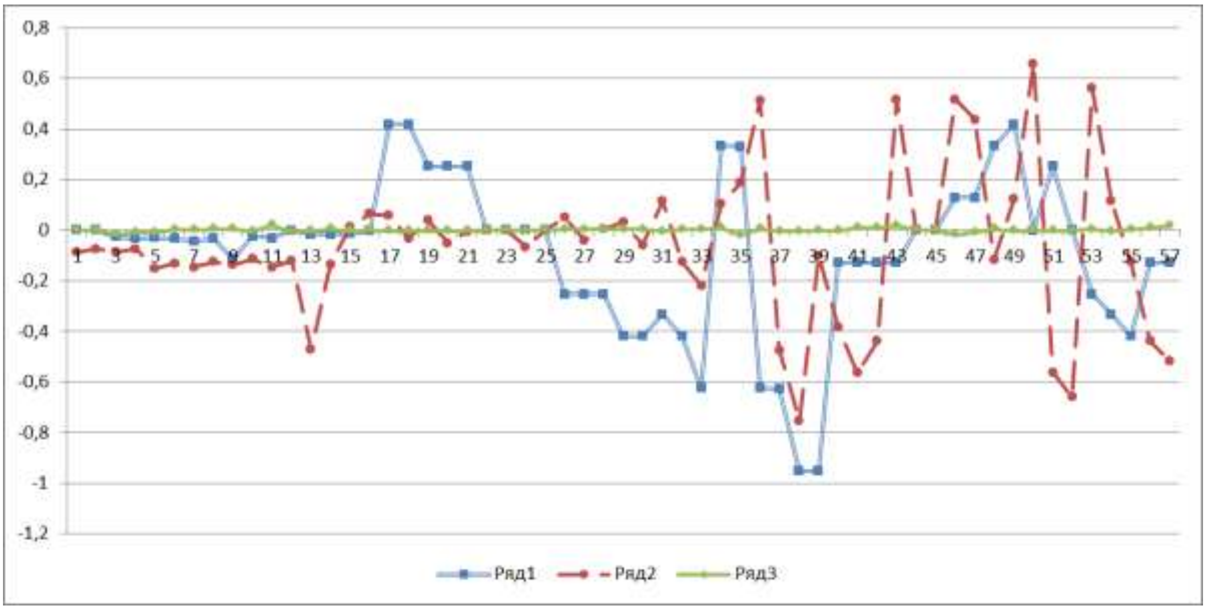

Рис. 3 – Угловые упругие перемещения модели схвата грейфера

На основе компьютерной программы STAP [2] нами была разработана компьютерная программа, реализующая вышеописанный подход. На рисунке 2 показаны значения упругих смещений узлов в следующем порядке: по оси абсцисс - номера узлов (рис.1), по оси ординат - линейные перемещения вдоль осей OX, OY, OZ ГСК – ряд 1, ряд 2 и ряд 3 соответственно. На рисунке 3 показаны значения упругих смещений узлов в следующе порядке: по оси абсцисс – номера узлов (рис.1), по оси ординат - угловые перемещения вокруг осей OX, OY, OZ ГСК – ряд 1, ряд 2 и ряд 3 соответственно. Рисунки 2,3 показывают, что узлы 3,4,14-16,21,24,28,31,32,42,43 и соответствующие им узлы 46-57 упругого смещения имеют по пяти степеней свободы те же значения, и только угловое смещение относительно оси "Y" различны.

Заключение:

Этот подход позволяет использовать МКЭ для РМ с кинематическими парами произвольной ориентации в пространстве. Идея предлагаемого метода заключается в том, что основное уравнение равновесия решается методом жестких узлов [1] в локальных системах координат пар. Основная схема МКЭ не изменяется. Разработана компьютерная программа, дается расчет модели конструкции схвата грейфера.

Литература

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М., Мир, 1984, 486с.
2. [Джолдасбеков У.А.], Темирбеков Е.С. Некоторые аспекты анализа и синтеза механизмов высоких классов: Монография.- Астана, Акмол. ЦНТИ, 2006.- 299с