УДК 517.956

А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов
д.ф.-м.н., зав. каф. ПМ. ОшТУ, преп. каф. ПМ ОшТУ
A. Zh. Ashirbayeva, Zh. I. Mambetov
D.ph.-m.s., head of the dep. “AM” OshTU, teacher dep. “AM” OshTU

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрено применение метода дополнительного аргумента для систем интегро-дифференциальных уравнений

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, система.

APPLICATION OF THE METHOD OF ADDITIONAL ARGUMENT FOR SYSTEM OF INTEGRA-DIFFERENTIAL EQUATIONS

In this article was considered application of a method of additional argument for systems of the Integra-differential equations.

Keywords: integral-differential equation, system.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + a_i(t,x)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = f_i(t,x) + \int_0^t K(t,s)u_i(s,x)ds \qquad (1)$$

$$i = 1,...,n$$

$$(t,x) \in Q(T) = \{0 \le t \le T,\, x = (x_1, x_2, ..x_n) \in R^n\},$$

с начальными условиями

$$u_i(0,x) = \varphi_i(x), \quad x \in R^n, \quad i = 1,...,n \qquad (2)$$

Будем обозначать через $C_b^{(n)}$ - класс функций, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до *k*–го порядка.

В работе [1] рассмотрено применение метода дополнительного аргумента для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема.

Теорема. Пусть $a_i(t,x),\ f_i(t,x) \in C_b^{(1)}(Q(T)), \qquad i = 1,...,n,$

$$K(t,s) \in C_b(D), \quad |K(t,s)| \le M = const, \quad D = \{0 \le s \le t < \infty\}$$

Тогда система интегро-дифференциальных уравнений (1) с начальным условием (2) имеет единственное решение в области

$C_b^{(1)}(Q(T_*)$, где T_* - положительное решение уравнения $\Omega(t) = 1$, где

$$\Omega(t) = Nt + Mt^2, \left| \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \right| \le N$$

Введем обозначение:

$$W(t,x) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial u_n}{\partial u_n} \qquad (3)$$

Тогда из (1) имеем

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + a_i W = f_i(t,x) + \int_0^t K(t,s) u_i(s,x) ds, \quad i = 1,...,n \tag{4}$$

Дифференцируем первое уравнение (4) (при *i=1*) по x_1, второе по x_2,..., n- е по x_n, получаем

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_i} W + a_i \frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \int_0^t K(t,s) \frac{\partial u_i(s,x)}{\partial x_i} ds, \quad i = 1,...,n \tag{5}$$

Отсюда, суммируя правые и левые части, получаем

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a_1 \frac{\partial W}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial W}{\partial x_2} + ... + a_n \frac{\partial W}{\partial x_n} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} W + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \int_0^t K(t,s) W(s,x) ds$$

Введем обозначения:

$$-A(t,x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i}, \; G(t,x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \; W(t,x)|_{t=0} = \psi(x) \tag{6}$$

Тогда получаем:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a_1 \frac{\partial W}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial W}{\partial x_2} + ... + a_n \frac{\partial W}{\partial x_n} = A(t,x) \cdot W + \int_0^t K(t,s) W(s,x) ds + G(t,x)$$

(7)

Итак, мы привели систему интегро-дифференциальных уравнений к уравнению в частных производных первого порядка.

Применяя для задачи (7) – (6) метода дополнительного аргумента, получаем:

$$W(t,x;u) = \psi(p(o,t,x)) + \int_0^t A(\nu, p(\nu,t,x)) W(\nu, p(\nu,t,x))) d\nu + $$
$$+ \int_o^t G(\nu, p(\nu,t,x)) d\nu + \int_0^t \int_0^\nu K(\nu,s) W(s, p(\nu,t,x)) ds d\nu \tag{8}$$

где $p(s,t,x) = (p_1(s,t,x),..., p_n(s,t,x))$ решение системы интегральных уравнений

$$p_i(s,t,x) = x_i - \int_0^t a_i(\nu, p(\nu,t,x)) d\nu, \quad i = 1..n. \tag{9}$$

$$(s,t,x) \in D(T) = \{x \in R^n, \quad 0 \le s \le t < T\},$$

Система интегральных уравнений (9) с $a_i(t,x) \in \overline{C}_b^{(1)}(D), i = 1..n$ имеет единственное решение с условием $p_i(s,s,x) = x_i$. В этом можем убедиться, используя, метода последовательных приближений.

Из (9) вытекает соотношение

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + a_1 \frac{\partial p_i}{\partial x_1} + ... + a_n \frac{\partial p_i}{\partial x_n} = 0, \; (s,t,x) \in D(T) \tag{10}$$

Для интегрального уравнения (8) применяем метода последовательных приближений, полагая

$$W_0(t,x;u)=\psi(p(o,t,x))+\int_o^t G(v,p(v,t,x))dv$$

$$W^N(t,x;u)=\psi(p(o,t,x))+\int_0^t A(p(v,t,x))W^{N-1}(v,p(v,t,x);u))dv+$$
$$+\int_o^t G(v,p(v,t,x))dv+\int_0^t\int_0^v K(v,s)W^{N-1}(s,p(v,t,x))dsdv$$

Для $N=1,2,3....,$ справедливы неравенства:

$$\left\|W^N(t,x;u)-W^{N-1}(t,x;u))\right\|\le\Omega(t)\left\|W^{N-1}(t,x;u)-W^{N-2}(t,x;u)\right\|,$$

где $\|W(t,x;u)\|=\max\{|W(t,x;u)|\quad (t,x)\in Q(T)$,

Таким образом, интегральное уравнение (8) имеет единственное решение $W(t,x;u)$.

Подставляя $W(t,x;u)$ в уравнение (4) и интегрируя обе части уравнения по t, получаем систему интегральных уравнений относительно неизвестной $u(t,x)=(u_1(t,x),...u_n(t,x))$.

$$u_i(t,x)=\varphi_i(x)-\int_0^t a_{i1}W(s,x;u)ds+ \tag{11}$$
$$+\int_0^t f_i(s,x)ds+\int_0^t\int_0^v K(v,s)u_i(v,x)dsdv,\quad i=1,...,n$$

Для интегрального уравнения (11) применяя метода последовательных приближений, полагая

$$u_i^{\,0}(t,x)=\varphi_i(x)-\int_0^t a_{i1}W(s,x;u)ds+\int_0^t f_i(s,x)ds,\quad i=1,...,n$$

получаем оценку

$$\left\|u_i^{\,N}(t,x)-u_i^{\,N-1}(t,x))\right\|\le Mt^2\left\|u^{N-1}(t,x)-u^{N-2}(t,x)\right\|,\ i=1,...,n$$

Литература:

1. Иманалиев *М.И.,* Алексеенко *С.Н.* К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Докл. АН, 1992. –Т.325, №6. –С. 1111-1115.