УДК 517.968

Г.Б. Сапарова - к.ф.-м.н., доц. каф. ПМ ОшТУ
G. B. Saparova- c.ph.-m.s., associate professor dep. "AM"

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА С РАЗРЫВНЫМ ЯДРОМ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Доказана существование и единственность решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с разрывным ядром в неограниченной области C[a,∞).

Ключевые слова. Интегральное уравнение первого рода, разрывное ядро, решение, существование, единственность.

UNIQUENESS OF THE SOLUTION INTEGRATED EQUATIONS OF FREDHOLM OF THE SECOND SORT WITH THE EXPLOSIVE KERNEL IN UNLIMITED SPACE

In this article (a, ∞) is proved existence and uniqueness of the solution of the integrated equation of Fredholm of the second sort with an explosive kernel in unlimited area C []

.

Keywords: The integral equation of the first kind, breaking the core solution, existence, uniqueness.

Введение

Интегральные уравнения первого рода при определенных условиях, на разных функциональных пространствах. Так в работе [1] предложен рассматривались метод регуляризации для интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода исследовались в [2,3,4,5,6] и других работах.

В [4] получена оценка точности приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода в равномерной метрике.

Постановка задачи.

Рассмотрим уравнение

$$u(t)=\int_a^t m(s)u(s)ds+\int_t^\infty n(s)u(s)ds+f(t)\text{,t}\in\text{[a,b]} \tag{1}$$

где m(s),n(s) – заданные функции, u(t)- неизвестная функция.

$$u(t)=\int_a^t m(s)u(s)ds-\int_a^t n(s)u(s)ds+\int_a^t n(s)u(s)ds+\int_t^\infty n(s)u(s)ds+f(t)$$

$$u(t)=\int_a^t [m(s)-n(s)]u(s)ds+\int_t^\infty n(s)u(s)ds+f(t)$$

Обозначим D(t)=m(t) – n(t), $\beta=1-\int_a^\infty n(s)e^{\int_a^s D(\sigma)]d\sigma}ds, \gamma=\int_a^\infty n(s)F(s)ds,$

$$F(t)=f(t)+\int_a^t e^{\int_s^t D(\nu)]d\nu}D(s)f(s)ds.$$

u(t) $\in C[a,\infty)$ – пространство всех непрерывных ограниченных функций на $[a,\infty)$.

n(s) $\in L_1(a,\infty) \Leftrightarrow \int_a^\infty |n(s)|ds < \infty$

Методы решения задачи.

Теорема 1 . Пусть $m(t), n(t) \in L_1[a,\infty)$, $f(t) \in [a,\infty)$.

Тогда:

1) Если $\beta \neq 0$, то в пространстве $C[a,\infty)$ существует единственное решение уравнения (1), причем это решение определяется по формуле

$$u(t) = \frac{1}{\beta}\int_a^\infty n(s) e^{\int_a^t D(\tau)d\tau} \left[f(s) + \int_a^s e^{\int_\tau^s D(\tau)d\tau} D(\tau) f(\tau) d\tau \right] ds + \tag{2}$$
$$+ f(t) + \int_a^t e^{\int_s^t D(s)ds} D(s) f(s) ds.$$

2) Если $\beta=0$ и $\gamma = 0$, то уравнение (1) в пространстве $C[a,\infty)$ имеет бесконечное количество решений, определяемых по формуле

$$u(t) = \alpha e^{\int_a^t D(s)ds} + F(t),$$

где α - произвольное постоянное.

3) Если $\beta=0$ и $\gamma \neq 0$, то уравнение (1) в пространстве $C[a,\infty)$ решений не имеет.

Доказательство. Приведем уравнение (1) к виду:

$$u(t) = \int_a^t D(s)u(s)ds + \int_a^\infty n(s)u(s)ds + f(t),.$$

Обозначим через

$$\alpha = \int_a^\infty n(s)u(s)ds. \tag{3}$$

Отсюда

$$u(t) = \int_a^t d(s)u(s)ds + \alpha + f(t). \tag{4}$$

Используя резольвенту ядра D(s), из (4) имеем

$$u(t) = \alpha + f(t) + \int_a^t e^{\int_s^t D(\nu)d\nu} D(s)[\alpha + f(s)]ds = \alpha(1+ \tag{5}$$
$$+ \int_a^t e^{\int_s^t D(\nu)d\nu} D(s)ds) + f(t) + \int_a^t e^{\int_s^t D(\nu)d\nu} D(s) f(s)ds.$$

Вычисляя интегралы и учитывая введенные обозначения, получаем

$$\int_a^t e^{\int_s^t D(\nu)d\nu} D(s)ds = e^{\int_s^t D(\nu)d\nu} - 1$$

И введя обозначение

$$F(t) = f(t) + \int_a^t e^{\int_s^t D(\nu)d\nu} D(s)f(s)ds. \qquad (6)$$

Имеем

$$u(t) = \alpha e^{\int_a^t D(s)ds} + F(t), \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (3), получаем

$$\alpha = \int_a^\infty n(s)[\alpha e^{\int_a^s D(\nu)d\nu} + F(s)]ds,$$

$$\alpha[1 - \int_a^\infty n(s)e^{\int_a^s D(s)ds} ds] = \int_a^\infty n(s)F(s)ds.$$

(8)

Учитывая введенные обозначения, получаем уравнение вида

$$\beta\,\alpha = \gamma \qquad (9)$$

1) Если $\beta \neq 0$, то получаем

$$u(t) = \frac{1}{\beta}[\int_a^\infty n(s)F(s)ds] \cdot e^{\int_a^t D(s)ds} + F(t). \qquad (10)$$

Подставляем заданные функции, имеем

$$u(t) = \frac{1}{\beta}\int_a^\infty n(s)[f(s) + \int_a^s e^{\int_\tau^s D(\tau)d\tau} D(\tau)f(\tau)d\tau]ds \cdot e^{\int_a^t D(s)ds} + f(t) +$$

$$+ \int_a^t e^{\int_s^t D(\nu)d\nu} D(s)f(s)ds.$$

2) Если $\beta = 0$ и $\gamma = 0$, то $\forall\ \alpha \in R$ является решением уравнения (9).

3) Если $\beta = 0$ и $\gamma \neq 0$, то уравнение (9) не имеет решения, то есть уравнение (1) в $C[a,\infty)$ не имеет решения.

Пример 1.

Пусть $m(s)=2(1+s)^{-2}$, $n(s)=(1+s)^{-2}$, $m(s)\text{-}n(s)=(1+s)^{-2}$, $a=0, b=\infty$, $f(t)=\dfrac{1}{1+t}$.

Тогда, имеем

$$u(t)=\int_0^t 2(1+s)^{-2}u(s)ds+\int_t^\infty (1+s)^{-2}u(s)ds+\frac{1}{1+t},$$

$$u(t)=\frac{1}{2-e}e^{\frac{1}{1+t}}+1.$$

В самом деле,

$$u(t)=\int_0^t (1+s)^{-2}u(s)\,ds+\int_0^\infty (1+s)^{-2}u(s)ds+\frac{1}{1+t},$$

Введем обозначения

$$\alpha=\int_0^\infty (1+s)^{-2}u(s)ds,$$

$$u(t)=\int_0^t (1+s)^{-2}u(s)ds+\alpha+\frac{1}{1+t},\quad u(t)=\alpha e^{\int_0^t (1+\nu)^{-2}d\nu}+1,$$

где $\alpha=\dfrac{1}{2-e}$, $\beta = 2 - e \neq 0$.

$$u(t)=\frac{1}{2-e}e^{\frac{1}{1+t}}+1.$$

Проверка: $I_1 = \int_0^t 2(1+s)^{-2}\left(\frac{1}{2-e}e^{\frac{s}{1+s}}+1\right)ds=\dfrac{2e^{\frac{t}{1+t}}}{2-e}-\dfrac{2}{2-e}+2$

$$I_2 = \int_t^\infty (1+s)^{-2}\left(\frac{1}{2-e}e^{\frac{s}{1+s}}+1\right)ds=\frac{e}{2-e}\left(1-e^{-\frac{1}{1+t}}\right)$$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2-e}e^{\frac{t}{1+t}}+1.$$

Литература:

1. [2] Иманалиев М.И., Асанов А.А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода. //Исследования по интегро – дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988 –Вып. 21.-с.3-38
2. [3] Сапарова Г.Б. Об одном классе интегральных уравнений Фредгольма второго рода с разрывным ядром // Исследования по интегро – дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 36. – С.74 – 79

3. [4] Саадабаев А.С. Оценка точности приближенного решения интегрального уравнения первого рода в равномерной метрике.// там же - с. 77-83.
4. [5] Асанов А., Сапарова Г.Б. Об одном классе системы интегральных уравнений Фредгольма с разрывным ядром // Исследования по интегро – дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 37. – С.63 – 69.
5. [6] Асанов А.А, Сыдыков Т., Сапарова Г. Регуляризация интегрального уравнения Фредгольма первого рода с разрывным ядром.//Сб. науч. статей. – Бишкек:ИГЗ КГПУ им. И.Арабаева, 2002. – с. 225-231.
6. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. Докл.АН СССР. – 1959 -Т.127, № 1-с.31-33