УДК 510.378-14

Ж.А. Абдрасулов, Ч.Б. Жолдошова, Ж.И. Мамбетов
доцент ОшТУ,ст.лаб каф .,преп.каф.ПМ ОшТУ
Zh.A.Abdrasulov, Ch.B. Joldoshova, Zh.I. Mambetov
Associate professor OshTU, senior lab.dep. “AM”, teacher dep. ‘AM” OshTU

ЖОГОРКУ МАТЕМАТИКАДАН ӨТҮЛҮҮЧҮ БИР КӨНДҮМ САБАГЫ ЖӨНҮНДӨ

“Жогорку математика” сабагында предельдер жана аларды таба билүү, кээде студенттер үчүн түшүн үксүздөй боло берет. Арийне, предельдер түшүнүгү математикада эң өзөктүү жана орчундуу түшүнүк. Анткени, көпчүлүк математикалык керектүү билимдер ушул предельдерди таба билүүгө көз каранды болот.

Негизги сөздөр: предельдер,функциялар, оордуна коюу ыкмасы.

ABOUT ONE PRACTICAL OCCUPATION ON HIGH MATHEMATICIAN

In high school, when teaching of discipline higher mathematics, findings limit very difficult for many student. So, student is obliged well to study and understand the findings a limit function.

Key words: limits, functions, replacing method.

Демек, бул түшүнүктү студенттер жакшылап өздөштүрүүсү жана түшүнүүсү зарыл жана жетиштүү.

Техникалык жана технологиялык окуу жайларында жогорку математика сабагын окутууда функциялардын пределдерин табуу негизги жана орчундуу орунда турат. Анткени, функциялардын пределдерин издей билүү жана жалпы эле пределдер жөнүндөгү түшүнүктөр бүт курстун башка бөлүмдөрүндө да көп жолугат. Ошол себептүү практикалык көндүм сабактарда функциялардын пределдерин табуну системалаштыруу жана жалпылаштыруу керектүү жана студенттер үчүн билим алууда пайдалуу болуп саналат. Биздин жекече педагогикалык субьективдүү оюбуз боюнча пределдер теориясын төмөндөгүдөй пландаштырып өтсө болот.

1. Функциялардын пределдерин теориялык эрежелерге ылайыктуу түшүнгөн студенттердин арасында деле пределдердин аныктамасын так «ε-δ тилинде» түшүнө билишет, бирок өздөрү ошого жетишээрлик деңгээлде канааттандыраарлык жооп бере албай турган студенттер бар. Ошондуктан, практикалык көндүм сабактарда төмөндөгүгө окшогон пределдерди көбүрөөк кароо зарыл. Мисалы, төмөндөгүдөй суроолорду көбүрөөк берүү зарыл:

$$\lim_{x\to 17_{+0}} f(x)=1 \text{ кандайча аныкталат?} \tag{1}$$

Туура жооптун мындайча болгону дурус:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0, \tag{2}$$

$$\forall x:-17<x<17\exists\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)-1|<\varepsilon, \tag{3}$$

мында ε - каалаганчалык кичине болгон оң сан.

2. Функциялардын пределдерин табууда көбүнчө чексиз сандарды (белгилерди), алар менен болгон амалдарды жана аныксыздыктарды чечүүнү көпчүлүк студенттер түшүнүшпөйт. Мисалы, төмөндөгүдөй жазууларды алар бүдөмүк түшүнүшөт:

1) $\pm\infty\pm x=\pm\infty$;
2) $\pm\infty\pm\infty=\pm\infty$;
3) эгерде $x>0:(\pm\infty)-x=\pm\infty$;
4) эгерде $x<0:(\pm\infty)-x=\pm\infty$;

5) $\forall x : \dfrac{x}{\pm\infty} = 0 : (\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = +\infty; (\pm\infty)\cdot(\mp\infty)\cdot(\mp\infty) = \pm\infty$;

6) $\left.\begin{matrix}(+\infty)+(-\infty)\\ (+\infty)\cdot 0\end{matrix}\right\}$ – булар аныкталган эмес;

7) эгерде $x > 0$ болсо, анда $x^{+\infty} = +\infty; x^{-\infty} = 0$ болот, же

8) 1^{∞}– аныкталган эмесдеген жазуулардын маанилерин студенттер көпчүлүк учурда толук билишпейт.

3. Ал эми $[x_n]$ жана $[y_n]$ удаалаштыктары берилсе, анда:

$$\text{а) } \left.\begin{matrix}x_n \to +\infty,\\ y_n \to x > 0\end{matrix}\right\} x_n \cdot y_n \to +\infty, \tag{4}$$

$$\text{б) } \left.\begin{matrix}x_n \to 0,\\ y_n \to x > 0\end{matrix}\right\} x_n / y_n \Rightarrow \infty \text{ же аныкталган эмес,} \tag{5}$$

$$\text{в) } \alpha \in \mathbf{R}, x_n = \frac{\alpha}{n};\ y_n = n, x_n \cdot y_n = \alpha, \tag{6}$$

$$\text{г) } x_n = \frac{1}{n};\ y_n = n^2;\ x_n \cdot y_n \to \infty,\ n \to \infty \text{ умтулганда} \tag{7}$$

$$\text{д) } x_n = \frac{(-1)^n}{n};\ y_n = n;\ x_n \cdot y_n = (-1)^n, \tag{8}$$

е) $x_n = \dfrac{n}{B};\ y_n = \dfrac{B}{n};\ x_n \cdot y_n = 1$ болот – дегенге окшогон түшүнүктөр толук жана жеткиликтүү түшүндүрүлүп берилбесе, анда студенттер кээде мисалдар чыгарууда көп кемчиликтер кетиришет. Студенттердин билим деңгээлиндеги мындай кемчиликтерди жоюу максатында биз төмөндөгүдөй жол менен практикалык көндүм сабагын уюштурууну сунуш этебиз.

Функциялардын пределдерин табууда аныксыздыктарды ачуунун кээ бир ыкмалары: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{g(x)}$, бул пределдин алымы да, бөлүмү да нөль болгон учур.

1-ыкма: Бир нече кашааларга ажыратуу ыкмасы. Айталы, предели берилип, $g(a) = 0$ болуп калсын. Анда төмөндөгүдөй жол менен аныксыздыкты жоебуз:

$$\varphi(x) = (x-a)^2 \cdot \varphi_1(x), \tag{9}$$

$$g(x) = (x-a)^2 \cdot g_1(x),\ g_1(a) \neq 0, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi_1(x)}{g_1(x)}, \tag{11}$$

Мисалы: 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m - 1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^{m-1} + \ldots + 1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + 1) = m$, Жообу: m.

$$2)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)} = -\frac{1}{2},\ \text{ Жообу: } -\frac{1}{2}.$$

2-ыкма: Өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу же ордуна коюу ыкмасы.

Айталы, $f(x) = g(t(x))$ татаал функция болуп $\lim\limits_{x\to a} t(x) = b$ жашасын жана $(x \neq 0 \Rightarrow t(x) \neq b)$ болсун, анда: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b = \lim\limits_{x\to b} g(t)$ болот.

Мисалы, төмөндөгү пределди тапкыла: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\alpha x}-1}{x}$.

Чыгаруу: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}\left[\begin{array}{l} t(x)=\sqrt[m]{1+\alpha x} \\ b=1,\left(x\neq 0\Rightarrow \sqrt[m]{1+\alpha x}\neq 1, t(x)\neq 1\right)\end{array}\right]=\alpha\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-1}{t^m-1}=$

$=\alpha\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-1}{(t-1)(t^{m-1}+t^{m-2}+\ldots+1}=\dfrac{1}{m}\cdot\alpha=\dfrac{\alpha}{m},\ m\neq 0$.

Себеби $|\alpha x|\leq 1$ үчүн, ал $1-(\alpha x)(<(1-(\alpha x)))^{\frac{1}{m}}\leq (1+\alpha x)^{\frac{1}{m}}=t(x)\leq (1+(\alpha x))^{\frac{1}{m}}<1+\alpha x$ болот.

Жообу: $\dfrac{\alpha}{m},\ m\neq 0$.

3-ыкма: Иррационалдуулукту жоюу ыкмасы

Бул ыкма менен пределдерди табууда негизинен төмөндөгү белгилүү формулалар пайдаланылат:

а) $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$,

б) $a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)$,

в) $a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$,

г) $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)$,

д) $a-b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$,

е) $a-b=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$.

Мисалы, төмөндөгү пределди тапкыла: $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt{x-4}-2}$.

Чыгаруу:

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt{x-4}-2}=\lim_{x\to 8}\left[\frac{2(x-8)}{\sqrt{9+2x}+5}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{x-8}\right]=\lim_{x\to 8}\left[\frac{2\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\sqrt{9+2x}+5}\right]=$$

$$=\frac{2(4+4+4)}{5+5}=\frac{24}{10}=\frac{12}{5},\qquad (12)$$

4-ыкма: Теңдеш өзгөртүп түзүү ыкмасы

Төмөндөгү пределди тапкыла:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-1}{\sqrt{1+\beta x}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-1}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+\beta x}-1}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[m]{1+\beta x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sqrt{1+\beta x}-1}{x}}=\frac{\alpha}{n}\cdot\frac{m}{\beta}=\frac{m\cdot\alpha}{n\cdot\beta},\qquad (13)$$

Жообу: $\dfrac{m\cdot\alpha}{n\cdot\beta},\ n\neq 0, \beta\neq 0$.

Мындай болгонунун себеби, акыркы эки предел тең өзгөртүп түзүүлөрдүн негизинде 3-ыкмага келип калды. Ал ыкманы жогоруда көрсөткөнбүз.

5-ыкма: Көрсөткүчтүү - даражалуу функциянын пределин таба билүү ыкмасы.

Төмөндөгүдөй пределди табуу керек болсун:

$$\lim_{x\to\varphi}[\varphi(x)]^{\varphi(x)}\quad (\varphi(x)\to 1, \varphi(x)\to\infty(x\to p)),\qquad (14)$$

Бул учурда көрсөткүчтүү функциянын үзгүлтүксүздүгүнөн пайдаланып, төмөндөгүдөй кылып өзгөртүп түзөбүз:

$$\lim_{x\to\rho}[\varphi(x)]^{\varphi(x)}\quad (\varphi(x)\to 1, \varphi(x)\to\infty(x\to p))=e^{\lim\limits_{x\to\rho}}[\varphi(x)-1]\cdot\varphi(x)$$

анткени,

$[1-\varphi(x)-1]\dfrac{1}{\varphi(x-1)}\cdot\varphi(x)[\varphi(x)-1]=e$ болот.

Мисалы, төмөндөгү пределди тапкыла:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+2x}\left[\begin{array}{l}\varphi(x)=\dfrac{1}{x},\varphi(x)=1+2x,\\ x\to a\Rightarrow\varphi(x)\to\infty,\\ x\neq 0\Rightarrow\varphi(x)\neq 1\\ \end{array}\right]=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\cdot\frac{1}{x}\right)}=e^2, \qquad (15)$$

Жообу: e^2.

6-ыкма: Логарифмикалык функциянын пределин издөө ыкмасы

Логарифмикалык функциянын үзгүлтүксүздүгүнөн пайдаланып, төмөндөгүдөй пределдик аныксыздыкты табабыз. Бизге белгилүү предел бар: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ln(1+x)-1}{x}=1$.

Ошондуктан $$\lim_{x\to\rho}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\rho}\frac{Ln[f(x)+1]}{g(x)}, \qquad (16)$$

болот.

Мисалы, төмөндөгү эки пределди тапкыла: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ жана $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^\mu-1}{x}$.

Чыгаруу: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ln[a^x-1+1]}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Lna^x}{x}=Lna$,

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^\mu-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ln(1+x)^\mu}{x}=\mu$.

Жообу: μ.

Жогоруда биз көрсөткөндөй ыкмалар менен функциялардын пределдерин табуу, университеттерде жогорку математика сабагын окутууда функциялардын пределдерин табуну системалаштырып алууга негиз түзөт. Мисалы, жогорку окуу жайларынын студенттери үчүн чыгарылган Б.П.Демидовичтин редакциясы астында түзүлгөн «Задачи и упражнения по математическому анализу» - деген окуу куралында функциялардын пределдерин табууга берилген мисалдарды бул ыкмалара менен төмөндөгүдөй салыштырууга болот:

а) 1-ыкма боюнча - №418-428 – номерлерди;

б) 2-ыкма боюнча - №437-443, №445-448 – номерлерди;

в) 3-ыкма боюнча - №444-452 –номерлерди;

г) 4-ыкма боюнча - №449-451 – номерлерди;

д) 5-ыкма боюнча - №541- номерлерди;

е) 6-ыкма боюнча - №544-546 – номерлерди иштөөгө болот.

Функциялардын пределдерин табуну мындай ыкмаларда системалаштырып чыгаруунун студенттер үчүн жардамы чоң болот – деп ишенүүгө толук мүмкүнчүлүктөр бар.

Ошентип, жогорку математика сабагынан өтүлүүчү ар бир көндүм сабак студенттердин билимдеринин терең жана так болуусуна өбөлгө түзүүчү сабак болуусу зарыл жана жетиштүү.

Адабияттар:

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.. Наука, 1968.
2. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу. М..Просвещение, 1974.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.. Просвещение, Т.1. 1976.