УДК 517.968

А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева
д.ф.-м.н., ст. преп. каф. “ПМ” ОшТУ
A.J. Ashirbaeva, E.A.Mamaziaeva – d.ph.-m.s., senior teacher dep. “AM”

# СВЕДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ПРОВОДАХ К СИСТЕМАМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

*Рассмотрено приведение нелинейной задачи электрических колебаний в проводах к системам интегральных уравнений методом дополнительного аргумента*

*Ключевые слова: нелинейное уравнение, функции, коэффициент, интегральные уравнении.*

# DATA OF NONLINEAR PROBLEM OF ELECTRIC FLUCTUATIONS IN WIRES TO SYSTEMS OF THE INTEGRATED EQUATIONS BY METHOD OF ADDITIONAL ARGUMENT

In *this article is considered tasks of nonlinear problem of electric fluctuations in wires to systems of the integrated equations by method of additional argument.*

*Keywords: nonlinear equation, function, coefficient of integral equations.*

Рассмотрено нелинейное уравнение для определения напряжения или электрического тока $u(t,x)$:

$$u_{tt} - a^2(t,x)u_{xx} - b(t,x,u)u_t = F(t,x;u), \qquad (1)$$

$$(t,x) \in G_2(T) = \{0 \le t \le T, \quad x \in R\},$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = u_k(x), \quad k = 0,1, \quad x \in R. \qquad (2)$$

Обозначим через $C_b^{(k)}$ – класс функций, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до *к*-го порядка.

Пусть
$u_k(x) \in C_b^{(2-k)}(R), \quad k = 0,1, \quad a(t,x) \in C_b^{(2)}(G_2(T)), \quad b(t,x,u), F(t,x,u) \in C_b^{(2)}(G_2(T) \times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица.

В [1] рассмотрено уравнение (1) в случае, когда коэффициенты при частных производных первого порядка не зависят от неизвестной функции.

Введем следующие обозначения:

$$D[\omega] = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\vartheta(t,x) = D[-a(t,x)]u(t,x), \quad \omega(t,x) = D[a(t,x)]u(t,x), \qquad (3)$$

$$g_i^j(t,x;u) = b(t,x;u) + (-1)^j \frac{1}{a(t,x)}(a_t(t,x) + (-1)^{i+1} a(t,x)a_x(t,x)), \; i, j = 1,2,$$

$$f_1^i(t,x,u) = D[(-1)^{i+1} a(t,x)]g_i^1, \quad f_2^i(t,x,u) = \frac{\partial g_i^1(t,x,u)}{\partial u}, \quad i = 1,2.$$

**Лемма.** Задача (1)-(2) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\vartheta(t,x)=\frac{1}{2}\varphi(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g_1^1(t,x,u)u+\frac{1}{2}\int_0^t g_1^2(s,q,u(s,q))\vartheta(s,q)ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t f_1^1(s,q,u(s,q))u(s,q)ds-\frac{1}{2}\int_0^t f_2^1(s,q,u(s,q))u(s,q)\omega(s,q)ds+\int_0^t F(s,q,u(s,q))ds \quad (4)$$

$$\omega(t,x)=\frac{1}{2}\psi(p(0,t,x))+\frac{1}{2}g_2^1(t,x,u)u+\frac{1}{2}\int_0^t g_2^2(s,p,u(s,p))\omega(s,p)ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t f_2^2(s,p,u(s,p))u(s,p)ds-\frac{1}{2}\int_0^t f_2^2(s,p,u(s,p))u(s,p)\vartheta(s,p)ds+\int_0^t F(s,p,u(s,p))ds, \quad (5)$$

где функция u(t,x) определяется из обозначений (3),

$\left[2\vartheta-g_1^1(t,x,u)u\right]_{t=0}=\varphi(x)$,

$\left[2\omega-g_2^1(t,x,u)u\right]_{t=0}=\psi(x)$,

$p(s,t,x),\quad q(s,t,x)-$ соответствующие решения интегральных уравнений:

$$p(s,t,x)=x+\int_s^t a(\tau,p(\tau,t,x))d\tau,\quad 0\le s\le t\le T \quad (7)$$

$$q(s,t,x)=x-\int_s^t a(\tau,q(\tau,t,x))d\tau,,\quad 0\le s\le t\le T, \quad (8)$$

Пусть $\vartheta(t,x),\ \omega(t,x)-$ решение системы интегральных уравнений (4)-(6). Непосредственным дифференцированием из (5) и (6) имеем:

$$\vartheta_t(t,x)+a(t,x)\vartheta_x(t,x)=\frac{1}{2}g_1^1(t,x,u)\omega(t,x)+\frac{1}{2}g_1^2(t,x,u)\vartheta(t,x)+F(t,x,u)$$

$$\omega_t(t,x)-a(t,x)\omega_x(t,x)=\frac{1}{2}g_2^2(t,x,u)\vartheta(t,x)+\frac{1}{2}g_2^2(t,x,u)\omega(t,x)+F(t,x,u).$$

Принимая во внимания обозначения (3) получаем справедливость уравнения (1).

Таким образом, мы доказали, система уравнений (3)-(4) удовлетворяет уравнению (1). Система уравнений (3)-(4) удовлетворяет и начальному условию (2).

Теперь покажем, что решение задачи (1)-(2) является решением системы интегральных уравнений (3)-(4), т.е. решение задачи (1)-(2) сводим к решению системы интегральных уравнений (3)-(4). Для этого запишем уравнение (1) в виде

$$D\left(2\vartheta(t,x)-g_1^1(t,x,u))u\right)=g_1^2(t,x,u)\vartheta(t,x)-f_1^1(t,x,u)u-f_2^1(t,x,u)u(t,x)\omega(t,x)+ \quad (9)$$
$$+2F(t,x,u)$$

Действительно из (9) имеем:

$$2\left[\frac{\partial\vartheta(t.x)}{\partial t}+a(t.x)\frac{\partial\vartheta(t,x)}{\partial x}\right]-f_2^1(t,x,u)\omega(t,x)u(t,x)-f_1^1(t,x,u)u(t,x)-g_1^1(t,x,u)\omega(t,x)=$$

$$=g_1^2(t,x,u)\vartheta(t,x)-f_1^1(t,x,u)u(t,x)-f_2^1(t,x,u)\omega(t,x)u(t,x)+2F(t,x,u)$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial\vartheta(t.x)}{\partial t}+a(t.x)\frac{\partial\vartheta(t,x)}{\partial x}\right]=g_1^1(t,x,u)\omega(t,x)+g_1^2(t,x,u)\vartheta(t,x)+2F(t,x,u) \quad (10)$$

Для (10) принимая во внимание обозначения (3), получаем:

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}-\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}-a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}\right]=$$

$$\left(b(t,x,u)-\frac{1}{a(t,x)}(a_t(t,x)+a(t,x)a_x(t,x))\right)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+\right.$$

$$\left.a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)+\left(b(t,x,u)+\frac{1}{a(t,x)}(a_t(t,x)+a(t,x)a_x(t,x))\right)$$

$$+\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}-a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)+2F(t,x,u)$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}-\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}-a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}\right]=2b(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}-$$

$$\left.-\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}-a(t,x,u)\frac{\partial a(t,x)}{\partial x}\right)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+2F(t,x,u)$$

Таким образом, мы показали, что из (9) получается уравнение (1).

Решение задачи (9)-(2) методом дополнительного аргумента сводится к интегральному уравнению (3).

Теперь запишем уравнение (1) в виде

$$\begin{aligned}&\overline{D}\left(2\omega(t,x)-g_2^1(t,x,u))u\right)=g_2^2(t,x,u)\omega(t,x)-f_2^1(t,x,u)u-\\&-f_2^2(t,x,u)u(t,x)\vartheta(t,x)+2F(t,x,u)\end{aligned}\qquad(11)$$

Действительно из (11) имеем

$$2\left[\frac{\partial\omega(t.x)}{\partial t}-a(t.x)\frac{\partial\omega(t,x)}{\partial x}\right]-f_2^2(t,x,u)u(t,x)\vartheta(t,x)-f_2^1(t,x,u)u(t,x)-g_2^1(t,x,u)\vartheta(t,x)=$$

$$=g_2^2(t,x,u)\omega(t,x)-f_2^1(t,x,u)u(t,x)-f_2^2(t,x,u)u(t,x)\vartheta(t,x)+2F(t,x,u)$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial\omega(t.x)}{\partial t}-a(t.x)\frac{\partial\omega(t,x)}{\partial x}\right]=g_2^1(t,x,u)\vartheta(t,x)+g_2^2(t,x,u)\omega(t,x)+2F(t,x,u)\qquad(12)$$

Для (12) используя обозначения (3) получаем:

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}-a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}\right]=$$

$$\left(b(t,x,u)-\frac{1}{a(t,x)}(a_t(t,x)-a(t,x)a_x(t,x))\right)\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}-\right.$$

$$\left.-a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right]+\left(b(t,x,u)+\frac{1}{a(t,x)}(a_t(t,x)-a(t,x)a_x(t,x))\right)$$

$$\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right]+2F(t,x,u)$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}-a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial t}\right]=2b(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+$$

$$+2\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}-a(t,x)\frac{\partial a(t,x)}{\partial x}\right)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \qquad (13)$$

Действительно из (13) получается уравнение (1).

Решение задачи (11)-(2) методом дополнительного аргумента сводится к интегральному уравнению (5).

Таким образом, доказали, что задача (1)-(2) эквивалентна системе интегральных уравнений.

Определим $u(t,x)$ из обозначений (3):

$$u(t,x)=u_0\left(p(0,t,x)\right)+\int_0^t \vartheta\left(s,p(s,t,x)\right)ds \quad (14)$$

$$u(t,x)=u_0\left(q(0,t,x)\right)+\int_0^t \omega\left(s,q(s,t,x)\right)ds \quad (15)$$

В систему интегральных уравнений (4), (5) подставляя (14), (15), получаем систему интегральных уравнений:

$$\vartheta(t,x)=\frac{1}{2}\varphi(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g_1^1(t,x,u_0\left(q(0,t,x)\right)+\int_0^t\omega\left(v,q(v,t,x)\right)ds)\left(u_0\left(q(0,t,x)\right)+\int_0^t\omega\left(v,q(v,t,x)\right)ds\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t g_1^2(s,q,u_0\left(q(0,t,x)\right)+\int_0^s\omega\left(v,q(v,t,x)\right)ds)\vartheta(s,q(v,t,x))ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t f_1^1(s,q,u_0\left(q(0,t,x)\right)+\int_0^s\omega\left(v,q(v,t,x)\right)ds)\left(u_0\left(q(0,t,x)\right)+\int_0^s\omega\left(v,q(v,t,x)\right)ds\right)ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t f_2^1(s,q,u_0\left(q(0,t,x)\right)+\int_0^s\omega\left(v,q(v,t,x)\right)ds)\left(u_0\left(q(0,t,x)\right)+\int_0^s\omega\left(v,q(v,t,x)\right)ds\right)\omega(s,q)ds+$$
$$+\int_0^t F(s,q,u_0\left(q(0,t,x)\right)+\int_0^s\omega\left(v,q(v,t,x)\right)ds)ds$$

$$\omega(t,x)=\frac{1}{2}\psi(p(0,t,x))+\frac{1}{2}g_2^1(t,x,u_0\left(p(0,t,x)\right)+\int_0^t\vartheta\left(v,p(v,t,x)\right)ds)\left(u_0\left(p(0,t,x)\right)+\int_0^t\vartheta\left(v,p(v,t,x)\right)ds\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t g_2^2(s,p,u_0\left(p(0,t,x)\right)+\int_0^s\vartheta\left(v,p(v,t,x)\right)ds)\omega(s,p(s,t,x))ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t f_2^2(s,p,u_0\left(p(0,t,x)\right)+\int_0^s\vartheta\left(v,p(v,t,x)\right)ds)\left(u_0\left(p(0,t,x)\right)+\int_0^s\vartheta\left(v,p(v,t,x)\right)ds\right)ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t f_2^2(s,p,u_0\left(p(0,t,x)\right)+\int_0^s\vartheta\left(v,p(v,t,x)\right)ds)\left(u_0\left(p(0,t,x)\right)+\int_0^s\vartheta\left(v,p(v,t,x)\right)ds\right)\vartheta(s,p)ds+$$
$$+\int_0^t F(s,p,u_0\left(p(0,t,x)\right)+\int_0^s\vartheta\left(v,p(v,t,x)\right)ds)ds.$$

**Литература:**


1. Аширбаева А.Ж., Мамазияева Э.А. Новый способ приведения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению // Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. выпуск. – С. 87–90.