УДК 517.84

Ж.Сагындыков, Н.К.Кадыркулова, А.А.Горбачева, Н. А.Адылбекова
К.х.н.,доцент ОшТУ,ст.преп.ОшТУ,доцент каф.физика ОшТУ,преп.каф.ТК
Zh. Sagyndykov, N.K. Kadyrkulova, A.A. Gorbacheva, N.A. Adylbekova
c.ch.s, associate professor OshTU, senior teacher, associate professor OshTU, teacher TC

ЭҢ КИЧИНЕ КВАДРАТТАР УСУЛУ ЖАНА АНЫ КОЛДОНУУ ШАРТТАРЫ

Бул макалада физикалык практикада көбүнчө кезигүүчү эксперименттик маалыматтарды кайра иштетүүнү эң кичине квадраттар усулунун жардамында чечүү мисалдар менен каралды

Негизги сөздөр:физикалык чондуктар,функциянн минимуму, теңдемелер системасы.

THE METHOD OF LEAST SQUARES AND ITS TERMS OF USE

In this article discussed the physical practice which usually takes place in solution in the processing of the experimental data by the least squares method with examples.

Key words: physical variables, functions, the minimum, the system of equations.

Физика курсу боюнча лабораториялык жумуштарды аткарууда, кандайдыр бир физикалык чоңдукту өлчөө ар кандай шарт үчүн, үчтөн кем эмес жолу өлчөнүүсү абзел, алынган жыйынтык төмөндөгүдөй түрдө $\sigma = \sigma \pm \Delta\sigma$ жазуу керек. Бул прибордун катачылыгын жана кыйыр түрдө кетирилген каталарды азайтуу үчүн керек. Алынган өлчөнүн жыйынтыктарын, изделүүчү чоңдуктун берилген параметрлерден көз карандылыгын аныктайбыз.

Эң кичине квадраттардын усулу (ЭККУ) көп сандагы сандык маанилерди колдонуу менен көпөтөгөн эсептөлөрдү талап кылат. Ошондуктан бул учурга эң эле туура келүүчү эсептө каражаты болуп компьютердик тилдерде түзүлгөн программа эсептелет. Бул макалада Flash чөйрөсүндөгү программа сунушталат.

Физикалык чоңдук *u* нун башка физикалык чоңдук *z* тен болгон функционалдык көз карандылыгы бизге белгилүү болсун дейли, бирок ушул көз карандылыктын *a*, *b*, *c*,... параметрлери белгисиз. Мисалы, $z_i (i = 1,2,\ldots,N)$ болгондогу маанилеринде өткөрүлгөн өлчөлөрдүн жыйынтыгында u_i *нин* маанилер таблицасы алынды (таблица 1) .

Таблица 1

N	*a*	*b*
1	1	1.1
2	3	1.98
3	5	3.2

$u = f(z, a, b, c, \ldots)$ функциясы эксперименттик маанилерди так көрсөтүп бере ала турган *a*, *b*, *c*,... параметрлерининин маанилерин табуу талап кылынат

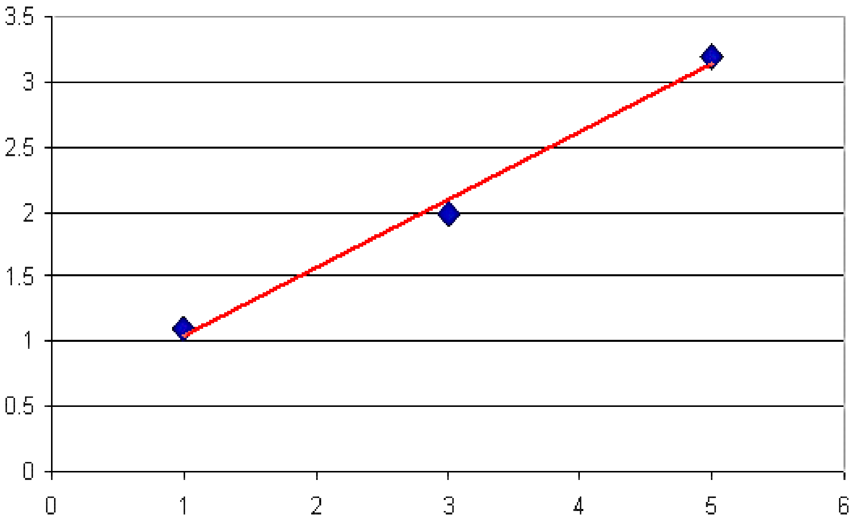
Эң кичине квадраттардын усулу “эң жакшы” ийри сызык болуп, ал үчүн u_i нин эксперименттик маанилерининин четтетилген квадраттарынын суммасы $f(z, a, b, c, \ldots)$функциясынын маанилеринен кичине болгондогу учуру экендигин тастыктайт. *a*, *b*, *c*,... u_i, z_i чоңдуктары эксперименталдык маанилерден белгилүү болгондугуна байланыштуу *a*, *b*, *c*,... параметрлеринин функциясы катары *Ф* каралып жаткандыгын белгилейбиз.

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} (u_i - f(z, a, b, c, \ldots))^2 \quad (1)$$

Берилген (1) функциясынын минимумун табуу дайыма мүмкүн боло бербейт. Ошондуктан эң кичине квадраттардын усулун практикалык түрдө аткаруу үчүн көп учурда төмөнкү жасалма жолду колдонушат: изилденип жаткан $u = f(z)$ көз карандылыгын түз сызыкка келтирүүчү жана ЭККУ ну ишке ашыруу жеңил болгон кандайдыр бир функционалдык өзгөртүп түзүүнү колдонушат[3]:

$$y = y(u), x = x(z)\,.\; y = a \cdot x + b \qquad (2)$$

Эгерде бул көз карандылыкты график түрүндө көрсөтсөк, анда графиктеги үч чекит бир түз сызыкта жатпай турган болот (Сүрөт 1.). Анда ушул үч чекит аркылуу жакындаштырып түз сызыкты өткөрсө болот, ага бизге ЭККУ жардам берет.



Сүрөт 1. Көз карандылыктын графиги

Мындай өзгөртүп түзүүлөр 2-таблицада көрсөтүлгөн.

Таблица 2

Көз карандылыктын түрү	Өзгөртүп түзүү	Параметрлер
$u = A \cdot z^{\gamma}$	$y = \ln u$ $x = \ln z$	$\ln u = \ln A + \gamma \cdot \ln z$ $a = \ln A \quad b = y$
$u = A \cdot e^{\gamma}\; u = A \cdot e^{\gamma}$	$y = \ln u$ $x = z$	$\ln u = \ln A + \gamma \cdot z$ $a = \ln A \quad b = y$
$u = \dfrac{A \cdot z}{1 + B \cdot z}$	$y = \dfrac{1}{u}$ $x = \dfrac{1}{z}$	$\dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{A \cdot z} + \dfrac{B}{A}$ $a = \dfrac{1}{A}, \quad b = \dfrac{B}{A}$

Кээ бир өзгөртүп түзүүлөр мисалдардын жардамында каралат. *a* жана *b* параметрлерин аныктоо үчүн (2) нин маанисин (1) ге коюп (3)-теңдемени алабыз.

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} (y_i - a \cdot x_i - b)^2 \quad (3)$$

Ал үчүн *Ф* функциясынын *a* жана *b* боюнча туундуларын нөлгө барабарлайбыз.

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{da} &= 0;\; a \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot x_i \\ \frac{d\Phi}{db} &= 0;\; a \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i + b \cdot N = \sum_{i=1}^{N} y_i \end{aligned} \qquad (4)$$

Алынган теңдемелер системасы сызыктуу болгондуктан чечүүгө жеңил:

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} y_i x_i - \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i^2)^2};$$
$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum y_i \cdot x_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i^2)^2}. \qquad (5)$$

Бирок, алынган маанилер практикалык эсептөлөр үчүн ыңгайсыз, ошондуктан аларды өзгөртүп түзүп алабыз. Ал үчүн:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \right)^2 = (x^2) - (x)^2 \qquad (6)$$

Жыйынтыгында төмөнкүнү алабыз (“$\langle ... \rangle$” кашаалар экспериментaлдык маанилердин орточо арифметикалык санын билдирет):

$$a = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{S_x^2} \qquad (7)$$

(4) системанын экинчи теңдемесинен $b = \langle y \rangle - a \cdot \langle x \rangle$ алабыз [2].

(6), (7) туюнтмаларынын маанилери (2) сызыктуу көз карандылыктын параметрлерин калькулятордун жардамында жетишээрлик тездик менен эсептөөгө мүмкүндүк берет. Ушундай жол менен алынган параметрлердин маанилери оптималдуу боло тургандай кылып шарттарды түзүп чыгабыз (аралаш,жеткиликтүү, эффективдүү баалоо [1]):

1. өлчөөлөрдүн жыйынтыктары көз карандысыз болуп эсептелинет.
2. Өлчөөлөрдүн катачылыктары нормалдуу бөлүштүрүүдөн көз каранды.
3. x_i чоңдуктары так белгилүү.

Эгерде y_i дын өлчөөдөгү каталыктары x_i дын өлчөө маанилеринин катачылыктарынан ашып кетсе, практикада ЭККУ көрсөтүлгөн түрдө колдонулат. Ушул шарттарды аткарууда a, b параметрлери y_i дын өлчөөлөрүнүн жыйынтыгы аркылуу сызыктуу берилет. Ошондуктан параметрлерди табуудагы каталыктар стандарттык каталыктарды кыйыр түрдө өлчөө усулу менен табылат. Бир канча чоң эсептөөлөр каталыктарды баалоо үчүн төмөнкү формула менен аныкталат:

$$\Delta a = 2\sqrt{\frac{1}{N-2}\left(\frac{S_y^2}{S_x^2} - a^2\right)} \qquad (8)$$

мында $S_y^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2$, калган белгилөөлөрдү өзгөртүүсүз сактайбыз:

$$\Delta b = \sqrt{S_x^2 + \langle x \rangle^2 \Delta a} \qquad (9)$$

Ошентип, (6) – (9) формулалары сызыктуу көз карандылыкты анализдөөдө толук бойдон ЭККУ ну пайдаланат. (7) – (8) формулалары өлчөөлөрдүн кокус болгон каталыгына баа берет[1]. Эгерде каталыктын бул тиби практикада катталса, аларды колдонуу толук бойдон акталат. (y_i, x_i) чекиттери графикте жайгашканда, алар бир сызыкта жайгашуусу мындай катталуунун далили болот. Тактап айтсак, туруктуу систематикалык прибордук каталыктар a параметрин табууга катышпайт жана b параметринин каталыгына аддитивдүү кошулма болуп эсептелет, б.а. эгерде прибордук каталыкты өлчөө чоңдугу $y_i = \Delta y_{pr}$ болсо, анда $\Delta a_{pr} = 0; \Delta b_{pr} = \Delta y_{pr}$.

Кээ бир учурларда z тин ошол эле маанисинде u чоңдугун бир нече жолу өлчөө талап кылынаарын белгилеп кетүү керек. Мындай учурда ЭККУ ну өзгөртүү талап кылынбайт. Бул маанилерди бири-биринен көз карандысыз кароо жетиштүү, б.а. эсептөөдө z_i, u_i маанисин z_i *дын* бирдей маанисинде колдоонуу керек болот. Тактап айтканда z тин бир эле маанисине u нун бир нече маанилери туура келиши мүмкүн. Албетте, z тин маанилеринин баары бирдей болбойт, болбосо (5) формуланын бөлүмү нөлгө барабар болуп калат.

ЭККУ ну мисалдарда колдонуу:

Маселе: математикалык маятниктин жардамында эркин түшүүнүн ылдамдануусун өлчөө.

Жабдыктар: жип, жүк, штатив, сызгыч, секундомер.

Чыгаруу: Математикалык маятниктин термелүү мезгили T төмөнкү формула менен аныкталат $T = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$. Бул формуланы төмөндөгүдөй түргө келтирүүгө болот $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{g} \cdot \ell$. $\Delta\ell$ маятнигинин узундугунун өзгөртүүсүн өлчөөлөрдүн жыйынтыгы жана t убакыт ичиндеги 20 термелүүнүн жыйынтыгы таблицада көрсөтүлгөн. Башка сөз менен айтканда, маятниктин узундугу l менен мезгилдин квадратынын ортосунда сызыктуу байланыш бар, ал төмөндөгүдөй жазылат: $y = a \cdot x + b$, мында $y = T^2, x = \ell$ (сызыктуу түргө өзгөртүү). Берилген учурда b параметрин киргизүү шарт эмес, анткени теорияга ылайык $b=0$.

Эгер бардык өлчөөлөр туура аткарылса, анда ЭККУ $\Delta b \le |b|$ деген жыйынтыкка алып келет, бул жыйынтык $b \equiv 0$ экендигин далилдейт. [3]

Маятниктин узундугун $\Delta\ell$ өлчөөнүн жыйынтыктары (өлчөө жиптин асылган точкасынан кайсы бир белгиленген точкага чейин жүргүзүлдү) жана 20 термелүүнүн убактысы (кол сааттын жардамында өлчөндү) 3 таблицада көрсөтүлдү.

Таблица 3

№	Дl, см	t, с	$x = \Delta L$, м	$y = \left(\dfrac{t}{20}\right)^2$	Эсептөөчү формулалар	Жыйынтыгы
1	2	3	4	5	6	7
1	65	36	0,65	3,24	$\langle x \rangle = \dfrac{\sum x_i}{N}$	0.378
2	54	33	0,54	2,72	$s_x^2 = \dfrac{\sum x_i^2}{N} - \langle x \rangle^2$	0.0393
3	37	29	0,37	2,10	$\langle y \rangle = \dfrac{\sum y_i}{N}$	2.14
4	21	25	0,21	1,56	$S_y^2 = \dfrac{\sum y_i^2}{N} - \langle y \rangle^2$	0.593
5	11	21	0,11	1,10	$a = \dfrac{1}{s_x^2} \cdot \left(\dfrac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle \right)$	3.88
6	-	-	-	-	$b = \langle y \rangle - a \cdot \langle x \rangle$	0.678
7	-	-	-	-	$\Delta a = 2\sqrt{\dfrac{1}{N-2} \cdot \left(\dfrac{s_y^2}{s_x^2} - a^2 \right)}$	0.22

8	-	-	-	-	$\Delta b = \Delta a \cdot \sqrt{s_x^2 + \langle x \rangle^2}$	0,094

Берилген усулдун жардамында чыгарылды: a коэффициентин эсептөө менен эркин түшүүнүн ылдамдануусун $g = \frac{4\pi^2}{a}$ жана анын каталыгын $\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta a}{a}, \Delta g = g \cdot \frac{\Delta a}{a}$ табууга болот. Жыйынтык боюнча төмөнкүгө ээ болобуз $g = (10{,}2 \pm 0{,}6)$ м/с. b параметринин мааниси колдонулган жок (алынган чоңдуктун негизги манызы – жиптеги белгиленген чекиттен жүктүн оордук борборуна чейинки аралык). Бул параметрди колдонуу оордук борборунун абалын так аныктоонун татаалдыгын жеңилдетет.

Корутунду:

ЭВМ дин жардамында ЭККУ ну колдонуу стандарттык программанын жардамында жүргүзүлөт. Эсептөөнүн жыйынтыгында сызыктуу теңдемелерди жана аларды графикте көрсөтүү каралган. Бул эксперименттик жыйынтыктарга жакын келген эсептүү сызык түз болуп каралат. Бирок көпчүлүк практикалык керектүү учурларда белгисиз параметрлердин саны өтө көп болушу мүмкүн, ошондуктан мындай учурда ЭККУ ну колдонуу бир гана эсептөө техникаларын пайдаланууда эффективдүү усул болуп эсептелет.

ЭККУ Flash анимациясында колдонуу жогорку жана орто окуу жайлары үчүн физика курсун терең өздөштүрүүгө мүмкүнчүлүк берет.

Адабияттар:

1. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. С.112-113.
2. Граков В.Е., Сокольский А.А., Стельмах Г.Ф. Лабораторный практикум по физике.
3. Тэйлор Дж. Введение в теорию ошибок. – М: Мир , 1985.-С.97-98.