

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

*Данная работа ставит своей целью вывод уравнений Максвелла для прямых и обратных задач. Вывод основан на исследовании преобразований тензоров электромагнитного поля и энергии-импульса. Излагается прямая и обратная задача для уравнений Максвелла, исходной посылкой для создания которого послужила необходимость численного решения ряда одномерных задач, т.е. для построения численного алгоритма решения.*

*Ключевые слова: уравнение Максвелла, прямая и обратная задача, алгоритм решения, электромагнетизм, ионизация.*

## MATHEMATICAL MODELS OF MAXWELL'S EQUATIONS

*This work aims at the conclusion of the Maxwell equations for the direct and inverse problems. The conclusion is based on a study of transformation tensor of the electromagnetic field and the energy-momentum. We present a direct and inverse problem for the Maxwell equations, the original premise for the creation of which was the need of the numerical solution of a number of one-dimensional problems, i.e. to construct a numerical solution algorithm.*

*Keywords: Maxwell's equations, direct and inverse problem solution algorithm, electromagnetism, ionization.*

Уравнения Максвелла – это вершина человеческой мысли в построении естественно - научной теории, это ориентир, к которому стремятся в попытках окончательного научного осмысления некоторого круга явлений все физики-теоретики, понимая, что именно в таком виде должна быть оформлена окончательно разработанная научная теория [1-3].

Собственно Максвелл получил воплощение идеи математически строгой непротиворечивости, достаточности и полноты для системы электромагнитных уравнений. Теперь для решения любой задачи электромагнетизма необходимо лишь выяснить известные экспериментальные параметры, подставить их в систему Максвелла, а анализ всех возможных технических и научных следствий становится делом математической техники.

Все уравнения в системе Максвелла нашли другие ученые-экспериментаторы и теоретики. Но именно Максвелл проанализировал и отобрал в систему некоторые из множества уравнений электричества, магнетизма уравнения электромагнитной связи и показал, что, добавив в выделенные им уравнения идею тока смещения, можно получить такую систему уравнений, которая была бы достаточна для решения любой задачи электромагнетизма.

Математические модели электромагнитных полей, генерируемых при ионизации больших объемов газа импульсными потоками фотонов, могут основываться на трехмерных уравнениях Максвелла с начальными условиями на фронте ионизации. Примером такого процесса является образование электромагнитного поля тормозным гамма-излучением, образующимся при воздействии электронов ускорителя на мишень. Если длительность импульса фотонов мала по сравнению с характерным линейным размером заполненного газом объема, то плотность стороннего тока комптоновских электронов и вторичная ионизация образуются в узком слое за фронтом гамма-излучения. Этот факт и обуславливает необходимость выделения переднего фронта. Мишень является, по сути, изотропным источником фотонов. Поскольку длины пробегов квантов существенно превышают размер

мишени, существенные участки фронта их потока имеют форму, близкую к сферической. Электромагнитное поле также имеет сферический фронт. Выделение переднего фронта целесообразно также при моделировании распространения коротких электромагнитных импульсов в средах с заданным распределением электрофизических параметров. Это позволяет, с одной стороны, исключить из рассмотрения те точки пространства-времени, до которых импульс еще не распространился, а с другой – достаточно подробно описать его временную зависимость, сохраняя крупную пространственную сетку.

Выделение переднего фронта и формулировка соответствующих начальных условий превращают задачу Коши для уравнений Максвелла в задачу с существенно отличающимися свойствами. В частности, возникают проблемы, связанные с единственностью решения. Эти проблемы проявляются и при построении алгоритмов численного решения таких задач. Например, ни одна явная разностная схема для этого класса задач не может быть устойчива.

Построение численных алгоритмов прямой и обратной задачи для уравнений Максвелла сталкивается с проблемой обоснования свойств разностных схем, которые должны отражать свойства дифференциальной задачи. Основным здесь является обоснование единственности решения задачи Коши и доказывать сходимости разностных схем в энергетической норме.

*Идея Максвелла о токе смещения.*

До Максвелла было принято различать два основных вида электрических токов: ток проводимости и ток переноса.

Током проводимости называется ток, образованный направленным движением свободных зарядов в среде под действием электрического поля. Типичный пример – электрический ток, образованный направленным движением свободных электронов.

Ток переноса (или иначе, конвекционный ток) создается движущимися заряженными макрочастицами или макроэлементами вещества, например, заряженными каплями дождя, струей ионизированного газа или потоками свободных заряженных частиц, например потоком ионов в ускорителях или электронным лучом в кинескопе телевизора.

Ток смещения, введенный Максвеллом, не связан с движением свободных зарядов. Этот вид тока весьма специфичен. Рассмотрим подробно ток смещения на одном примере.

Представим плоский конденсатор, подключенный к источнику переменного тока. Как известно, по такой цепи проходит переменный ток. В соединительных проводах и в источнике он представлен током проводимости. Однако в конденсаторе электроны не могут проникать через диэлектрик с одной обкладки на другую. При прохождении тока по цепи конденсатора имеют место два физических явления. С одной стороны, между обкладками существует переменное электрическое поле, создаваемое переменными зарядами на обкладках. С другой стороны, действием этого поля создается переменная поляризация диэлектрика в конденсаторе.

Очень важным обстоятельством здесь является то, что, как показывает опыт, между обкладками, помимо переменного электрического поля, имеет место переменное магнитное поле подобно тому, как оно имеет место вокруг соединительных проводов. Следовательно, переменные электрические поля и переменная поляризация среды создают магнитные поля так, как их создают обычные токи проводимости. В силу этой физической общности переменные электрические поля и создаваемую ими переменную поляризацию рассматривают как особый вид тока – ток смещения. Еще одна важная причина для принятия такой точки зрения заключается в том, что построение физически обоснованной теории электрических токов требует замкнутости токов. Введение понятия «ток смещения» обеспечивает такую замкнутость в рассмотренном примере: в источнике тока и в соединительных проводах электрический ток представлен в виде тока проводимости, а в конденсаторе – в форме тока смещения. При этом из соображений непрерывности следует принять, что сила тока в обеих формах одинакова.

Возникает естественный вопрос: почему два физических явления, образующие ток смещения, создают магнитные поля? В этом и состоит один из важных законов природы,

ухваченный гением Максвелла и нашедший свое выражение в идее о «токе смещения», а затем и в системе уравнений Максвелла. А именно: переменные электрические поля создают магнитные поля и существуют только совместно с ними, причем **такие поля существуют даже в вакууме, где нет смещения электрических зарядов внутри молекул**. Идея Максвелла позволила развернуть в вакууме пластины конденсатора и выпустить в пространство электромагнитную волну. Что касается переменной поляризации, то она создает магнитное поле потому, что в ее основе лежит возвратно-поступательное движение связанных зарядов молекулярных диполей. Как и всякое движение любых зарядов, оно создает магнитное поле.

### **1. Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах.**

Система уравнений, состоящая из уравнений Максвелла для электромагнитного поля и уравнений Ньютона для частиц, представляет собой единую систему уравнений, описывающую все явления, обусловленные электромагнитным взаимодействием (без учёта релятивистских и квантовых эффектов). Поэтому, строго говоря, их необходимо решать совместно в задачах электродинамики. Однако в такой наиболее общей постановке решать задачи о взаимодействии электромагнитного поля с веществом чрезвычайно трудно. Сложность проблемы заключается в том, что вещество состоит из громадного количества частиц, движение которых каждой в отдельности невозможно описать. С такой проблемой сталкиваются в классической механике при попытках описать механическое движение газов, жидкостей и твёрдых тел. Чтобы обойти эту трудность физикам приходилось строить определённые модели механических систем: модель абсолютно твёрдого тела, модель сплошной среды и др. При изучении взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем также приходится вводить некоторые модели. Одной из таких широко употребляемых, является модель сплошной среды, состоящая из электрических диполей (*диэлектрик*). Эта модель электрического диполя играет очень важную роль в физике, так как атомы и молекулы представляют собой системы заряженных частиц, которые в целом нейтральны, но могут обладать отличным от нуля дипольным моментом и поэтому создавать электрическое поле.

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Эта теория объяснила все известные в то время экспериментальные факты и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии. Основным следствием теории Максвелла был вывод о существовании электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света.

Основу теории образуют уравнения Максвелла. В учении об электромагнетизме эти уравнения играют такую же роль, как законы Ньютона в механике или основные законы (начала) в термодинамике. *Ниже приведена полная система уравнений Максвелла классической электродинамики в сплошной среде.*

***Первую пару уравнений Максвелла образуют уравнения:***

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2)$$

Здесь вектор  $\vec{E}$  - вектор напряжённости электрического поля,  $\vec{B}$  - вектор индукции магнитного поля.

Первое из этих уравнений связывает значение  $\vec{E}$  с изменениями вектора  $\vec{B}$  во времени и является по существу выражением закона электромагнитной индукции. Оно показывает, что источником вихревого поля вектора  $\vec{E}$  является меняющееся со временем вихревое магнитное поле. Второе уравнение указывает на отсутствие источников магнитного поля, т.е. магнитных зарядов, как в вакууме, так и в намагниченном веществе.

***Вторую пару уравнений Максвелла образуют уравнения:***

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (4)$$

где  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  - вектор электрического смещения,  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$  - напряжённость магнитного поля,  $\vec{M}$  - намагниченность вещества,  $\vec{P}$  - поляризованность,  $\vec{j}$  - вектор плотности тока,  $\rho$  - объёмная плотность заряда.

Первое уравнение устанавливает связь между токами проводимости и токами смещения, и порождаемым ими магнитным полем. Второе показывает, что источниками вектора  $\vec{D}$  служат сторонние заряды.

**Дифференциальная форма уравнений Максвелла.** Уравнения Максвелла представляют собой систему из восьми (два векторных с тремя компонентами каждое и два скалярных) линейных дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка для 12 компонент четырёх векторных функций ( $D, E, H, B$ ):

Таблица 1

Название	СГС	СИ	Примерное словесное выражение
Закон Гаусса	$\operatorname{div} D = 4\pi\rho$	$\operatorname{div} D = \rho$	Электрический заряд является источником электрической индукции.
Закон Гаусса для магнитного поля	$\operatorname{div} B = 0$	$\operatorname{div} B = 0$	Не существует магнитных зарядов.
Закон индукции Фарадея	$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$	$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	Изменение магнитной индукции порождает вихревое электрическое поле.
Закон Ампера Максвелла	$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}$	$\operatorname{rot} H = j + \frac{\partial D}{\partial t}$	Электрический ток и изменение электрической индукции порождают вихревое магнитное поле.

где:

- $\rho$  — плотность стороннего электрического заряда (в единицах СИ — Кл/м<sup>3</sup>);
- $\vec{j} = \mathbf{u}\rho$  — плотность электрического тока (плотность тока проводимости) (в единицах СИ — А/м<sup>2</sup>);
- $\mathbf{u}$  — скорость зарядов в данной точке;
- $c$  — скорость света в вакууме (299 792 458 м/с);
- $\vec{E}$  — напряжённость электрического поля (в единицах СИ — В/м);
- $\vec{H}$  — напряжённость магнитного поля (в единицах СИ — А/м);
- $\vec{D}$  — электрическая индукция (в единицах СИ — Кл/м<sup>2</sup>);
- $\vec{B}$  — магнитная индукция (в единицах СИ — Тл = Вб/м<sup>2</sup> = кг•с<sup>-2</sup>•А<sup>-1</sup>);

Приведённые выше уравнения Максвелла не составляют ещё полной системы уравнений электромагнитного поля, поскольку они не содержат свойств среды, в которой возбуждено электромагнитное поле. Соотношения, связывающие величины  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{j}$  и учитывающие индивидуальные свойства среды, называются материальными уравнениями.

Вышеперечисленные уравнения представляют собой дифференциальную форму уравнений Максвелла. Можно отметить, что в первую пару уравнений входят только основные характеристики поля -  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Во второй паре фигурируют только вспомогательные величины  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ .

Можно отметить, что вид уравнений (2) и (4) не зависит от наличия среды, в то время как векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ , а также величины  $\rho$  и  $\vec{j}$ , входящие в уравнения (3) и (4), зависят от свойств вещества и условий, в которых оно находится. Любое макроскопическое тело, рассматриваемое как сплошная среда, состоит из заряженных частиц – электронов и ядер, обладающих также и магнитными моментами, и поэтому взаимодействующих с электромагнитным полем, являясь в то же время и его источниками. Т. о., величины  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\rho$  и  $\vec{j}$  следует определять, исходя из электрических и магнитных свойств вещества.

Выводя формулу (1), Максвелл предположил, что изменяющегося со временем магнитное поле обуславливает появление в пространстве поля  $\vec{E}_B$ , независимо от присутствия в пространстве проволочного контура. Наличие контура лишь позволяет обнаружить по возникновению в нем индукционного тока существование в соответствующих точках пространства электрического поля.

Рассмотрим случай электромагнитной индукции, когда проволочный контур, в котором индуцируется ток, неподвижен, а изменения магнитного потока обусловлены изменениями магнитного поля. Возникновение индукционного тока свидетельствует о том, что изменения магнитного поля вызывают появление в контуре сторонних сил, действующих на носители тока. Эти сторонние силы не связаны ни с химическими, ни с тепловыми процессами в проводе; они также не могут быть магнитными силами, потому что такие силы над зарядами работы не совершают. Остаётся заключить, что индукционный ток обусловлен возникающим в проводе электрическим полем. Обозначим напряжённость этого поля  $\vec{E}_B$  (это обозначение является вспомогательным так же как и  $\vec{E}_q$ ). Электродвижущая сила равна циркуляции вектора  $\vec{E}_B$  по данному контуру:

$$\varepsilon_i = \oint \vec{E}_B d\vec{l} \quad (5)$$

Подстановка в формулу  $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$  выражения (5) для  $\varepsilon_i$  и выражения  $\int \vec{B} d\vec{S}$  для  $\Phi$  приводит к соотношению

$$\oint \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{S}$$

(интеграл в правой части берётся по произвольной поверхности, опирающейся на контур). Поскольку контур и поверхность неподвижны, операции дифференцирования по времени и по поверхности можно поменять местами:

$$\oint \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (6)$$

В связи с тем, что вектор  $\vec{B}$  зависит, вообще говоря, как от времени, так и от координат, то можно написать под знаком интеграла символ частной производной по времени (интеграл  $\int \vec{B} d\vec{S}$  является функцией только времени).

Левую часть равенства (6) преобразуем по теореме Стокса. В результате получится:

$$\int_s [\nabla \vec{E}_B] d\vec{S} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Ввиду произвольности выбора поверхности интегрирования должно выполняться равенство

$$[\nabla \vec{E}_B] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Ротор поля  $\vec{E}_B$  в каждой точке пространства равен взятой с обратным знаком производной по времени от вектора  $\vec{B}$ .

Это поле  $\vec{E}_B$ , порождающееся изменением магнитного поля, существенно отличается от порождаемого электрическими зарядами электрического поля  $\vec{E}_q$ . Электростатическое поле потенциально, его линии начинаются и заканчиваются на зарядах. Ротор вектора  $\vec{E}_q$  в любой точке равен нулю:

$$[\nabla \vec{E}_q] = 0.$$

Согласно (6) ротор вектора  $\vec{E}_B$  отличен от нуля. Следовательно, поле  $\vec{E}_B$  так же, как и магнитное является вихревым. Линии напряжённости  $\vec{E}_B$  замкнуты.

Таким образом, электрическое поле может быть как потенциальным ( $\vec{E}_q$ ) так и вихревым ( $\vec{E}_B$ ). В общем случае электрическое поле складывается из этих двух полей. Сложив вместе  $\vec{E}_q$  и  $\vec{E}_B$ , получим следующее уравнение:

$$[\nabla \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (7)$$

Существование взаимосвязи между электрическим и магнитным полями служит причиной того, что раздельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет лишь относительный смысл. Действительно, электростатическое поле создаётся системой неподвижных зарядов в одной системе координат, однако они могут двигаться относительно другой инерциальной системы отсчёта и тогда они будут во второй системе подвижными, следовательно, будут создавать магнитное поле. Таким образом, поле, которое относительно некоторой системы отсчёта оказывается «чисто» электрическим или «чисто» магнитным, относительно других систем отсчёта будет представлять собой совокупность электрического и магнитных полей, образующих единое электромагнитное поле.

Выводя формулу (3), Максвелл пересмотрел уравнения для ротора вектора  $\vec{H}$  для случая стационарного (не изменяющегося со временем) электромагнитного поля, где ротор вектора  $\vec{H}$  равен в каждой точке плотности тока проводимости:

$$[\nabla \vec{H}] = \vec{j}, \quad (8)$$

где вектор  $\vec{j}$  связан с плотностью заряда в той же точке уравнением непрерывности:

$$\nabla \vec{j} = -\frac{d\rho}{dt} \quad (9)$$

Электромагнитное поле может быть стационарным лишь при условии, что плотность заряда  $\rho$  и плотность тока  $\vec{j}$  не зависят от времени. В этом случае согласно (3.2) дивергенция  $\vec{j}$  равна нулю.

Поэтому можно выяснить, является ли справедливым уравнение (9) справедливым в случае изменяющихся со временем полей. Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током,

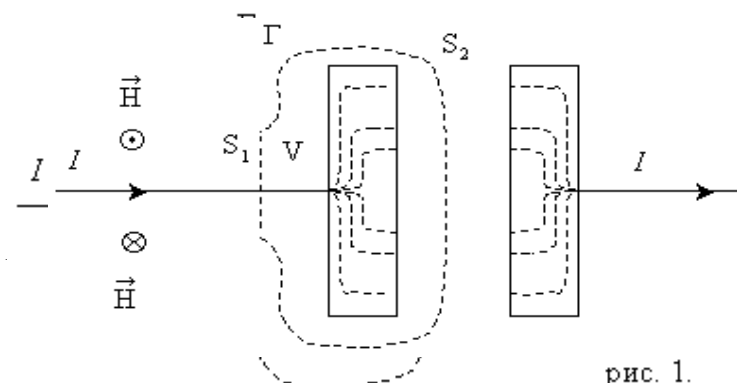


рис. 1.

текущим при зарядке конденсатора от источника постоянного напряжения  $U$  (рис. 1).

Этот ток непостоянен во времени (в момент, когда напряжение на конденсаторе становится равным  $U$ , ток прекращается). Линии тока

проводимости терпят разрыв в промежутке между обкладками конденсатора.

Возьмём круговой контур  $\Gamma$ , охватывающий провод, по которому течёт ток к конденсатору, и проинтегрируем соотношение (8) по пересекающей провод поверхности  $S_1$ , ограниченной контуром:

$$\oint_{S_1} [\nabla \vec{H}] d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{j} d\vec{S}.$$

Преобразовав левую часть по теореме Стокса, получим циркуляцию вектора  $\vec{H}$  по контуру  $\Gamma$ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_1} \vec{j} d\vec{S} = I \quad (10)$$

( $I$  – сила тока заряжающего конденсатор). Прделаем такие же вычисления для поверхности  $S_2$ , придём к явно неверному соотношению:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_2} \vec{j} d\vec{S} = 0 \quad (11)$$

Полученный результат указывает на то, что в случае изменяющихся со временем полей уравнение (8) перестаёт быть справедливым. Напрашивается вывод, что в этом уравнении отсутствует слагаемое, зависящее от произвольных полей во времени. Для стационарных полей это слагаемое обращается в нуль.

На неправомочность уравнения (8) в случае нестационарных полей указывает также, следующие соображения. Возьмём дивергенцию от обеих частей соотношения (8):

$$\nabla [\nabla \vec{H}] = \nabla \vec{j}.$$

Дивергенция ротора должна быть обязательно равна нулю. Таки образом, можно прийти к выводу, что дивергенция вектора  $\vec{j}$  также должна быть всегда равной нулю. Однако этот вывод противоречит уравнению непрерывности, где  $\vec{j}$  отлична от нуля.

Чтобы согласовать уравнения (8) и (9), Максвелл ввел в правую часть уравнения (8) дополнительное слагаемое. Естественно, что это слагаемое должно иметь размерность плотности тока. Максвелл назвал его плотностью *тока смещения*. Таким образом, согласно Максвеллу уравнение (8) должно иметь вид:

$$[\nabla \vec{H}] = \vec{j} + \vec{j}_{смещ.} \quad (12)$$

Сумму тока проводимости и тока смещения принято называть полным током.

Плотность полного тока равна:

$$\vec{j} = \vec{j} + \vec{j}_{пол.} \quad (13)$$

Если положить дивергенцию тока смещения равной дивергенции тока проводимости, взятой с обратным знаком,

$$\vec{j}_{смещ.} = -\nabla \vec{j} \quad (14)$$

то дивергенция правой части уравнения (12), так же как и дивергенция левой части,

всегда будет равна нулю.

Заменив в (14)  $\nabla \vec{j}$  согласно (9) через  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ , получим следующее выражение для дивергенции тока смещения:

$$\nabla \vec{j}_{смещ.} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (15)$$

Чтобы связать ток смещения с величинами, характеризующими изменение

электрического поля со временем, воспользуемся соотношением:

$$\nabla \vec{D} = \rho$$

Продифференцировав это соотношение по времени, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \vec{D}) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Теперь поменяем в левой части порядок дифференцирования по времени и по координатам. В результате придём к следующему выражению для производной  $\rho$  по  $t$ .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right).$$

Подстановка этого выражения в формулу (15) даёт:

$$\nabla \vec{j}_{\text{смещ.}} = \nabla \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right), \quad \vec{j}_{\text{смещ.}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (16)$$

Подставив выражение (16) в формулу (13), придём к уравнению

$$[\nabla \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Каждое из векторных уравнений (1) и (3) эквивалентно трем скалярным уравнениям, связывающим компоненты векторов, стоящих в левой и правой частях равенств. Воспользовавшись правилом раскрытия дифференциальных операторов, можно записать их в следующем виде:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (17)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

для первой пары уравнений, и:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \quad (19)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad (20)$$

для второй.

Всего получилось 8 уравнений, в которых входят 12 функций (по три компоненты векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ .) Поскольку число уравнений меньше числа известных функций, уравнений (1) - (4) недостаточно для нахождения по заданным распределениям зарядов и токов. Чтобы осуществить расчёт полей, нужно дополнить уравнения Максвелла уравнениями, связывающими  $\vec{D}$  и  $\vec{j}$  с  $\vec{E}$ , а также  $\vec{H}$  с  $\vec{B}$ . Эти уравнения имеют вид.

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \quad (21)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \quad (22)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (23)$$

Совокупность уравнений (1) – (11) образуют основу электродинамики покоящихся сред.

**Уравнения:**

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (24)$$



$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (25)$$

(первая пара) и

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S} \quad (26)$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV \quad (27)$$

(вторая пара) представляют собой уравнения Максвелла в интегральной форме.

Уравнение (24) получается путём интегрирования соотношения (1) по произвольной поверхности  $S$  с последующим преобразованием левой части по теореме Стокса в интеграл по контуру  $\Gamma$ , ограничивающему поверхность  $S$ . Уравнение (26) получается таким же способом из соотношения (3). Уравнения (25) и (27) получаются из соотношений (2) и (4) путём интегрирования по произвольному объёму  $V$  с последующим преобразованием левой части по теореме Остроградского-Гаусса в интеграл по замкнутой поверхности  $S$ , ограничивающей объём  $V$ .

## 2. Граничные условия.

При решении задач электродинамики, учитывается, что все макроскопические тела ограничены поверхностями. При переходе через эти поверхности физические свойства макроскопических тел изменяются скачком и поэтому также скачком могут изменяться электромагнитные поля, создаваемые этими телами. Другими словами векторные функции  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$  являются кусочно-непрерывными функциями координат, т.е. они непрерывны вместе со своими производными внутри каждой однородной области, но могут претерпевать разрывы на границах раздела двух сред. В связи с этим представляется удобным решать уравнения Максвелла (1) - (4) в каждой области, ограниченной некоторой поверхностью раздела отдельно, а затем полученные решения объединять с помощью граничных условий.

При нахождении граничных условий удобно исходить из интегральной формы уравнений Максвелла. Согласно уравнению (4) и теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int \operatorname{div} \vec{D} dV = \int D_n dS = \int \rho dV = Q, \quad (28)$$

где  $Q$  – полный заряд внутри объёма интегрирования.

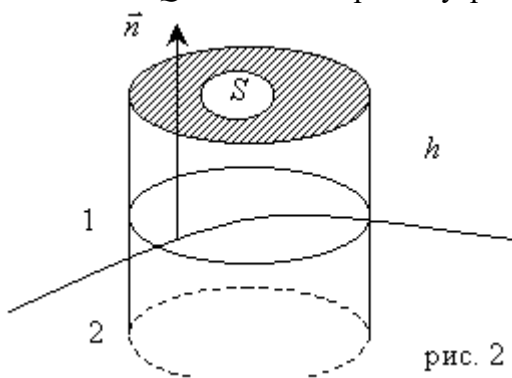


рис. 2

Рассмотрим бесконечно малый объём в виде цилиндра с высотой  $h$  и площадью основания  $S$ , расположенный в средах 1 и 2 (рис. 2). Соотношение (28) в этом случае можно записать в виде:

$$D_{1n}S - D_{2n}S + \int_{\text{бок}} D_n dS = Q \quad (29)$$

здесь  $\vec{n}$  – нормаль к границе раздела двух сред, направленная из среды 2 в среду 1. Знак «минус» во втором слагаемом обусловлен тем, что внешняя нормаль  $\vec{n}$  поверхности интегрирования

в среде 2 направлена противоположно нормали  $\vec{n}$  в среде 1. Пусть основание цилиндра стремится к границе раздела двух сред. Так как площадь боковой стремится к нулю, то  $\int_{\text{бок}} D_n dS \rightarrow 0$ , и поэтому (17) приобретёт вид:

$$D_{1n} - D_{2n} = \frac{Q}{S} = \sigma \quad (30)$$

где  $D_{2n}$  и  $D_{1n}$  – значения нормальных составляющих вектора  $\vec{D}$  по разные стороны поверхности раздела;  $\sigma$  – поверхностная плотность зарядов, избыточных по отношению к связанным зарядам самого вещества. Если поверхность раздела не заряжена, то в формуле

(30) необходимо положить  $\sigma=0$ . Пользоваться понятием поверхностной плотности удобно тогда, когда избыточные (сторонние) заряды расположены в очень тонком слое вещества  $d$ , а поле рассматривается на расстояниях от поверхности  $r \gg d$ . Тогда из определения объёмной плотности заряда  $\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta S \cdot d}$  следует:

$$\sigma = \rho d = \frac{\Delta Q}{\Delta S}.$$

Если учесть, что  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , а  $(\vec{P} \cdot \vec{n})$  - поверхностная плотность поляризационных зарядов, то формулу (18) можно записать в виде:

$$\epsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}) = \sigma + \sigma_{полн}$$

где  $\sigma_{полн} = P_{1n} - P_{2n} = (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n}$ , а величина  $\sigma$ , которая входит в граничное условие (30), есть поверхностная плотность зарядов, избыточных по отношению к связанным зарядам самого вещества.

Используя уравнение (2) и проводя аналогичные рассуждения, получаем граничное условие для вектора  $\vec{B}$ :

$$B_{1n} - B_{2n} = 0 \quad (31)$$

Выражения (30) и (31) – граничные условия для нормальных составляющих векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{D}$ . Чтобы получить условия для тангенциальных составляющих можно использовать уравнения (1) и (3). Умножим уравнение (3) скалярно на положительную нормаль  $\vec{N}$  к поверхности  $S$ , ограниченной контуром  $L$ , имеющим вид прямоугольника (рис. 3).

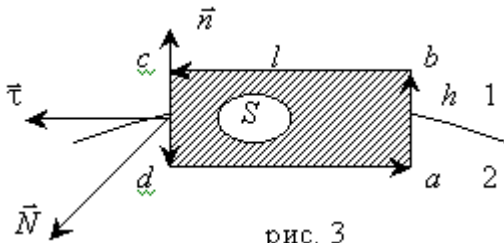


рис. 3

Используя теорему Стокса, получим:

$$\oint (\vec{N} \cdot \text{rot } \vec{H}) dS = \oint_L (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = \frac{\partial}{\partial t} \int (\vec{N} \cdot \vec{D}) dS + \int (\vec{N} \cdot \vec{j}) dS$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$\oint (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = \int_a^b H_n dh + \int_b^c (\vec{H}_1 \cdot \vec{\tau}) dl - \int_d^a (\vec{H}_2 \cdot \vec{\tau}) dl - \int_d^a H_n dh = \frac{\partial}{\partial t} \int (\vec{N} \cdot \vec{D}) dh dl + \int (\vec{N} \cdot \vec{j}) dh dl \quad (32)$$

Здесь  $\vec{H}_1$  и  $\vec{H}_2$  - значения вектора  $\vec{H}$  соответственно в средах 1 и 2,  $\vec{\tau}$  - единичный вектор, касательный к поверхности раздела,  $\vec{n}$  - нормаль к поверхности раздела, направленная из среды 2 в среду 1.

Пусть теперь  $h \rightarrow 0$  при малом, но фиксированном  $l$ . Тогда  $\int H_n dh \rightarrow 0$ ,

$\int D_n dS \rightarrow 0$  и соотношение (32) примет вид:

$$(\vec{H}_1 \cdot \vec{\tau} - \vec{H}_2 \cdot \vec{\tau}) \cdot l = (\vec{j} \cdot \vec{N}) hl$$

и после сокращения на  $l$  имеем:

$$(\vec{H}_1 \cdot \vec{\tau} - \vec{H}_2 \cdot \vec{\tau}) = (\vec{j} \cdot \vec{N}) h = (\vec{i} \cdot \vec{N})$$

здесь  $\vec{i} = \vec{j} \cdot h$ . Вектор  $\vec{\tau}$ , как следует из рисунка 2, можно записать как в виде

$\vec{\tau} = [\vec{N}, \vec{n}]$ . Тогда предыдущее выражение можно записать, как

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot [\vec{N}, \vec{n}] = [\vec{n}, (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)] \cdot \vec{N} = \vec{i} \cdot \vec{N}.$$

Поскольку эта формула справедлива для любой ориентации поверхности, а следовательно, и вектора  $\vec{N}$ , то имеем

$$[\vec{n}, \vec{H}_1] - [\vec{n}, \vec{H}_2] = \vec{i} \quad (33)$$

В граничном условии (21) присутствует поверхностная плотность тока, избыточная по отношению к токам намагничивания. Если токи отсутствуют, то следует положить  $\vec{i} = 0$ . Учитывая, что  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ , а  $[\vec{M}, \vec{n}]$  есть поверхностная плотность тока намагничивания, запишем формулу (33) в виде:

$$[\vec{n}, \vec{B}_1] - [\vec{n}, \vec{B}_2] = (\vec{i} + \vec{i}_{\text{нам}}) \mu_0$$

где  $\vec{i}_{\text{нам}} = [\vec{M}_1, \vec{n}] - [\vec{M}_2, \vec{n}] = [(\vec{M}_1 - \vec{M}_2), \vec{n}]$ .

Используя уравнение (1) и проводя аналогичные рассуждения, получаем граничные условия для вектора  $\vec{E}$ :

$$[\vec{n}, \vec{E}_1] - [\vec{n}, \vec{E}_2] = 0 \quad (34)$$

Таким образом, уравнения Максвелла (1) - (4) должны быть дополнены граничными условиями (30), (31), (33) и (34). Эти условия означают непрерывность тангенциальных составляющих вектора  $\vec{E}$  (34) и нормальной составляющей вектора  $\vec{B}$  (31) при переходе через границу раздела двух сред. Нормальная составляющая вектора  $\vec{D}$  при переходе через границу раздела испытывает скачок, тангенциальная составляющая вектора  $\vec{H}$ , если имеются поверхностные токи (34).

Ещё одно граничное условие можно получить, используя уравнение непрерывности ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$ ) и уравнение (4), из которых следует:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D} + \text{div } \vec{j} = \text{div} \left\{ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right\}$$

Так как граничное условие (31) является следствием уравнения (2), то по аналогии находим:

$$\frac{\partial \vec{D}_{1n}}{\partial t} + j_{1n} = \frac{\partial \vec{D}_{2n}}{\partial t} + j_{2n} \quad (35)$$

Если же на поверхности раздела нет зарядов, поверхностная плотность которых зависит от времени, то из (30) и (35) следует непрерывность нормальных составляющих плотности тока:

$$j_{1n} = j_{2n}.$$

Итак, граничные условия на поверхности раздела двух сред имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) &= \sigma; & [\vec{n}, (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)] &= 0 \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) &= 0; & [\vec{n}, (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)] &= \vec{i} \end{aligned} \quad (36)$$

где  $\vec{n}$  - нормаль к границе раздела, направленная из среды 2 в среду 1, и должны выполняться в любой момент времени и в каждой точке поверхности раздела.

### 3. Уравнения Максвелла в системе уравнений магнитостатики и электростатики.

Так как на практике почти всегда приходится решать уравнения Максвелла (1) – (4) в кусочно-непрерывных средах, то граничные условия (36) следует рассматривать как неотъемлемую часть уравнений Максвелла (1) – (4).

В случае стационарных электрических и магнитных полей ( $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$  и  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ ) система уравнений Максвелла (1) – (4) распадается на систему уравнений электростатики:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \quad (37)$$

и уравнений магнитостатики:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (38)$$

а граничные условия остаются те же.

#### 4. Пример

В качестве примера решения электростатических задач можно вычислить электрическое поле, создаваемое диэлектрическим шаром радиуса  $R$ , находящемся в однородном электрическом поле  $\vec{E}_0$ . Уравнения электростатики в диэлектрике (25) при  $\rho = 0$  имеют вид:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \quad (39)$$

Из этих уравнений следует, что потенциал электростатического поля удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(\varepsilon \vec{\nabla} \varphi) = 0 \quad (40)$$

причём  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$ ,  $\vec{D} = -\varepsilon_0 \varepsilon \vec{\nabla} \varphi$ . В однородном диэлектрике  $\varepsilon = \text{const}$ , поэтому уравнение (39) переходит в обычное уравнение Лапласа  $\Delta \varphi = 0$ .

Граничное условия (36), выражающее непрерывность вектора индукции, записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \quad \text{при } r=R \quad (41)$$

Здесь  $\varphi_1$  – решение уравнения вне сферы, а  $\varphi_2$  – внутри сферы. Вместо граничного условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля можно использовать эквивалентное ему условие непрерывности потенциала

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (42)$$

Это условие можно получить, рассматривая интеграл  $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$  по контуру, изображенному на рис. 2. Воспользовавшись теоремой Стокса и уравнением  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$ , находим

$$\int (\vec{N} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}) dS = \oint (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = -\oint (\vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{l}) = \oint d\varphi = 0$$

Так как интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, то это значит, что функция  $\varphi$  непрерывна, откуда и следует условие (42). Из (42) очевидно так же, что

$$d\varphi_1 = (\vec{\nabla} \varphi_1 \cdot d\vec{l}) = d\varphi_2 = (\vec{\nabla} \varphi_2 \cdot d\vec{l})$$

где элемент  $d\vec{l}$  направлен касательно к границе раздела. Из этого равенства следует, что тангенциальные компоненты вектора  $\vec{E}$  также непрерывны.

Для решения поставленной задачи используем сферическую систему координат, полярная ось которой (ось  $z$ ) совпадает с направлением напряжённости однородного внешнего электрического поля  $\vec{E}_0$ .

Поскольку на достаточно большом удалении от диэлектрического шара электрическое поле не искажается наличием этого шара, то потенциал  $\varphi_1$  должен удовлетворять условию

$$\varphi_1 \rightarrow -(\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) = -E_0 \cdot \vec{r} \cos \theta, \quad -\vec{\nabla} \varphi_1 = \vec{E}_0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Из соображений симметрии ясно, что потенциал не должен зависеть от азимутального угла, поэтому решение уравнения Лапласа запишем в виде разложения по полиномам Лежандра  $P_l(\cos\theta)$ :

$$\varphi_1 = CrP_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta), \quad r > R,$$

$$\varphi_2 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta), \quad r < R.$$

Здесь потенциал нормирован так, чтобы  $\varphi_2 = 0$  при  $r = 0$ . Так как  $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ , то из условия на бесконечности находим  $C = -E_0$ .

Воспользуемся теперь граничными условиями (41) и (42):

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta) - E_0 R P_1(\cos\theta),$$

$$\varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos\theta) = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)}{R^{l+2}} B_l P_l(\cos\theta) - E_0 P_1(\cos\theta).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых полиномах Лежандра, получаем

$$A_0 = \frac{B_0}{R}, \quad B_0 = 0 \quad \text{при } (l=0),$$

$$A_1 R = \frac{B_1}{R^2} - E_0 R, \quad \varepsilon A_1 = -\frac{2}{R^3} B_1 - E_0 \quad \text{при } (l=1),$$

$$A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}}, \quad \varepsilon l A_l R^{l-1} = -\frac{(l+1)}{R^{l+2}} B_l \quad \text{при } (l>1).$$

Из этих уравнений находим

$$A_1 = -\frac{3E_0}{\varepsilon + 2}, \quad B_1 = \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon + 2} R^3 E_0.$$

Все остальные коэффициенты равны нулю, если  $l \neq 1$ .

Таким образом, решение задачи имеет вид:

$$\varphi_1 = -E_0 r \cos\theta + \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{R^3}{r} E_0 \cos\theta = -(\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{R^3}{r} \right), \quad (42^1)$$

$$\varphi_2 = -\frac{3E_0 r}{\varepsilon + 2} \cos\theta = -\frac{3}{\varepsilon + 2} \cdot (\vec{E}_0 \cdot \vec{r}).$$

Используя формулу  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \vec{P}$ , вычислим вектор поляризации диэлектрической сферы

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E} = -\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \nabla \varphi_2 = 3 \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \vec{E}$$

С помощью вектора поляризации формулы (42) можно записать в виде:

$$\varphi_1 = -(\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) + \frac{V}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(\vec{P} \cdot \vec{r})}{r^3} \quad (43)$$

$$\varphi_2 = -(\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) + \frac{(\vec{P} \cdot \vec{r})}{3\varepsilon_0} \quad (44)$$

где  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$  - объём сферы.

Первые два слагаемых в (43) и (44) представляют собой потенциал однородного внешнего поля, создаваемого внешними источниками. Вторые – это потенциал электрического поля, создаваемого электрическим шаром, поляризованным внешним полем. Вне сферы – это потенциал диполя с дипольным моментом  $\vec{p} = \vec{P}V$ . Внутри сферы поляризованный шар создаёт однородное электрическое поле с напряжённостью

$$\vec{E}_i = -\vec{\nabla} \left( \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{3\epsilon_0} \right) = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}. \quad (45)$$

Полная напряжённость внутри шара

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi_2 = \vec{E}_0 - \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} = \frac{3}{\epsilon + 2} \vec{E}_0. \quad (46)$$

Таким образом, электрическое поле внутри шара не зависит от радиуса шара и ослаблено на значение поля  $\vec{E}_i = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$ , которое называется деполаризующим полем.

Возникновение деполаризующего поля есть частный случай явления экранировки внешнего поля связанными или свободными зарядами.

## 5. Приложение.

### 5.1. Формула Остроградского – Гаусса.

Пусть  $f(x, y, z)$  - некоторая функция, а  $S$  - замкнутая поверхность, ограничивающая объём  $V$ . На отрезке 1-2 (рис. 4), параллельном оси  $X$ ,  $f$  - является функцией одного аргумента  $x$ . Интегрируя вдоль этого отрезка получим:

$$\int_{12} \frac{\partial f}{\partial x} dx = f_2 - f_1,$$

где  $f_1$  и  $f_2$  - значения функции  $f$  на концах рассматриваемого промежутка.

Построим теперь бесконечно узкий цилиндр, одной из образующих которого является отрезок 1 2. Пусть  $d\sigma$  - площадь поперечного сечения его (величина положительная). Умножая предыдущее соотношение на  $d\sigma$ . Так как  $d\sigma dx$  есть элементарный объём  $dV$ , заштрихованный на рисунке, то в результате получится:

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial f}{\partial x} dV = d\sigma \cdot (f_2 - f_1),$$

где  $dV$  - часть объёма  $V$ , вырезаемого из него поверхность цилиндра. Пусть  $dS_1$  и  $dS_2$  элементарные площадки, вырезаемые тем же цилиндром на поверхности  $S$ , а  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  - единичные нормали к ним,

проведенные наружу от поверхности  $S$ . Тогда:

$$d\sigma = d\vec{S}_2 \cdot \vec{n}_{2x} = -d\vec{S}_1 \cdot \vec{n}_{1x},$$

а поэтому: 
$$\int_{\Delta V} \frac{\partial f}{\partial x} dV = f_1 n_{1x} dS_1 + f_2 n_{2x} dS_2,$$

или короче: 
$$\int_{\Delta V} \frac{\partial f}{\partial x} dV = \int_{dS_1 + dS_2} f n_x dS,$$
 где поверхностный интеграл распространён на

сумму площадок  $dS_1$  и  $dS_2$ . Весь объём  $V$  можно разделить на элементарные цилиндры рассматриваемого вида и написать для каждого из них такие же соотношения. Суммируя эти соотношения, получим:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV = \oint_S f n_x dS, \quad (47)$$

Интеграл справа распространён по всему объёму  $V$ , справа - по поверхности  $S$ , ограничивающей этот объём. Аналогичные соотношения можно написать для осей  $Y$  и  $Z$ .

Возьмём теперь произвольный вектор  $\vec{A}$  и применим к его компонентам

соотношение (47). Получим:

$$\int_V \frac{\partial \bar{A}_x}{\partial x} dV = \oint_S f \bar{A}_x n_x dS,$$

и аналогично для компонент  $A_y$  и  $A_z$ . Складывая эти соотношения, найдём:

$$\int_V \left( \frac{\partial \bar{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{A}_z}{\partial z} \right) dV = \oint_S (A_x n_x + A_y n_y + A_z n_z) dS,$$

или:

$$\int_V \operatorname{div} \bar{A} dV = \oint_S (\bar{A} \cdot \bar{n}) dS.$$

Эту формулу *Остроградского – Гаусса* можно также записать в виде:

$$\int_V \operatorname{div} \bar{A} dV = \oint_S \bar{A} d\bar{S}.$$

Смысл её заключается в том, что полный поток вектора  $\bar{A}$  через некоторую поверхность  $S$  равен суммарной алгебраической мощности источников, порождающих векторное поле.

Если объём  $V$  бесконечно мал, то величина  $\operatorname{div} \bar{A}$  внутри него может считаться постоянной. Вынося её за знак интеграла и переходя к пределу  $V \rightarrow 0$ , получим:

$$\operatorname{div} \bar{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\bar{A} d\bar{S}).$$

Предельный переход надо понимать в том смысле, что область  $V$  должна стягиваться в точку, т.е. размеры этой области должны беспредельно уменьшаться по всем направлениям. Эти рассуждения показывают, что величина, стоящая в правой части вышеуказанной формулы, не зависит от формы поверхности  $S$ , стягиваемой в точку. Поэтому это выражение можно принять за исходную формулировку дивергенции. Такое определение обладает преимуществом, потому что оно инвариантно, т.е. никак не связано с выбором координат.

## 5.2. Формула Стокса.

По определению ротор (вихрь) некоторого вектора  $\bar{A}$ :

$$\operatorname{rot}(\bar{A})_n = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \cdot \oint_{\Gamma} \bar{A} d\bar{l} \quad (48)$$

Зная ротор вектора  $\bar{A}$  в каждой точке некоторой (не обязательно плоской) поверхности  $S$ , можно вычислить циркуляцию этого вектора по контуру  $\Gamma$ , ограничивающему  $S$ , (контур также может быть не плоским). Для этого разобьём поверхность на очень малые элементы  $\Delta S$ . Ввиду их малости эти элементы можно считать плоскими. Поэтому в соответствии с (36) циркуляция вектора  $\bar{A}$  по контуру, ограничивающему  $\Delta S$ , может быть представлена в виде.

$$\Delta C \approx (\operatorname{rot} \bar{A})_n \cdot \Delta S = \operatorname{rot} \bar{A} \cdot \Delta \bar{S} \quad (49)$$

где  $\bar{n}$  - положительная нормаль к элементу поверхности  $\Delta S$ .

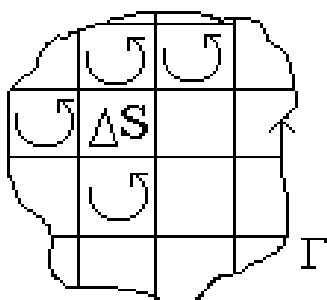


рис. 5

Зная, что циркуляция по некоторому контуру равна сумме циркуляций по контурам, содержащиеся в данном, можно просуммировать выражение (49) по всем  $\Delta S$ , и тогда получим циркуляцию вектора  $\bar{A}$  по контуру  $\Gamma$ , ограничивающему  $S$ :

$$C = \sum \Delta C \approx \sum \operatorname{rot} \bar{A} \cdot \Delta \bar{S}.$$

Осуществив предельный переход, при котором все  $\Delta S$  стремятся к нулю (число их при этом неограниченно растёт, придём к формуле:

$$\oint_{\Gamma} \bar{A} d\bar{l} = \int_S \operatorname{rot} \bar{A} d\bar{S} \quad (50)$$

Соотношение (50) носит название теоремы *Стокса*. Смысл её состоит в том, что циркуляция вектора  $\vec{A}$  по произвольному контуру  $\Gamma$  равна потоку вектора  $\text{rot } \vec{A}$  через произвольную поверхность  $S$ , ограниченную данным контуром.

**Интегральная форма.** При помощи формул Остроградского—Гаусса и Стокса дифференциальным уравнениям Максвелла можно придать форму интегральных уравнений:

**Уравнения Максвелла для диэлектрических сред.**

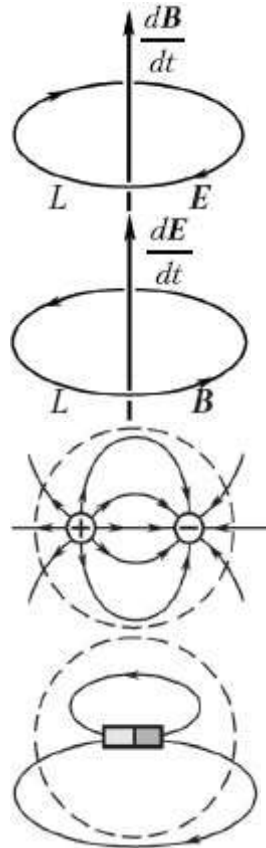
**Таблица 2.**

$$\oint_L \vec{E}_t dl = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint_L \vec{B}_t dl = \frac{1}{v^2} \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\oint_S \vec{E}_{nS} dS = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon}$$

$$\oint_S \vec{B}_{nS} dS = 0$$



Вихревое электрическое поле порождается изменяющимся магнитным. Закон изменения магнитного поля во времени определяет закон изменения электрического поля в пространстве

Вихревое магнитное поле порождается изменяющимся электрическим. Закон изменения электрического поля во времени определяет закон изменения магнитного поля в пространстве

Источниками электрического поля являются электрические заряды. Силовые линии электрического поля начинаются и оканчиваются на зарядах или уходят в бесконечность

Магнитных зарядов не существует. Силовые линии магнитного поля замкнуты

## 6. Прямая задача системы уравнений Максвелла в геоэлектрике.

Геоэлектрика изучает изменяющуюся с глубиной и по латерали электропроводность земных недр в широком диапазоне масштабов. От электропроводности планеты в целом до образцов горных пород (измерения на керне). Взаимодействие вариаций магнитного и электрического полей, обусловленных как естественными, так и искусственно индуцированными токами, используется в магнитотеллурическом зондировании для изучения строения нижней части коры и верхней мантии, при разведке полезных ископаемых разведочными методами геоэлектрики.

Электромагнитные методы изучения геологической среды, поиска полезных ископаемых основываются на дифференциации горных пород по электромагнитным свойствам. Характер электромагнитных полей, обусловленных как искусственными, так и естественными источниками, определяется геоэлектрическим строением изучаемого участка. Некоторые геологические объекты в определенных условиях способны создавать собственные электрические поля. По выявленной электромагнитной аномалии можно делать выводы, направленные на решение поставленных задач.

Современная электроразведка имеет в арсенале более 50 методов. Такое разнообразие объясняется тем, что в ней используются различные электрические и электромагнитные поля. Естественные поля космической, атмосферной и электрохимической природы; искусственные поля с различными способами их создания и измерения (гальваническим, индуктивным и дистанционными); гармонические поля широкого диапазона частот; импульсные поля разной длительности; регистрируются сигналы разных частотных (от миллигерц до сотен терагерц) и динамических диапазонов.



Кроме того, электроразведка пользуется новейшими достижениями электротехники и радиоэлектроники. При электроразведке измеряются амплитуды электрических и магнитных составляющих поля, а также их фазы. Регистрация ведется в аналоговой, но в последнее время все больше в цифровой форме. При измерениях, обработке и интерпретации результатов широко применяется современная компьютерная техника.

Методы геоэлектромантных исследований (методы геоэлектрики и электроразведки) чрезвычайно разнообразны как по своим целям, так и по физико-математическим и методологическим основам. Эти методы привлекаются к решению фундаментальных геолого-геофизических задач (глубинное строение Земли, происходящие в ней геодинамические и иные процессы) и широко используются в практике прикладных исследований (поиски и разведка нефтегазовых, угольных и рудных месторождений, гидрогеологические, экологические и инженерно-геологические задачи). Часть из них базируется на строгой физико-математической основе - электродинамике сплошных сред (методы классической геоэлектрики), что позволяет вывести интерпретацию полученных ими результатов на количественный уровень. Это различные варианты электромагнитного (ЭМ) зондирования и профилирования, радиоволновые методы и т.п. В других методах (неклассической геоэлектрики) изучаются экспериментально наблюдаемые явления, не вписывающиеся в рамки электродинамики и обязанные своим существованием специфике исследуемой геологической среды. Последняя, как известно, представляет собой сложную энергетически открытую гетерогенную и полифазную систему, находящуюся в локально неустойчивом состоянии. В такой системе наблюдаются энергетические переходы одних геофизических полей в другие, значимые изменения свойств среды при слабых воздействиях.

К неклассической геоэлектрике относятся как ставшие уже традиционными методы естественного электрического поля и вызванной поляризации, так и новые методы, появившиеся или получившие новый импульс к своему развитию за последние годы (высокоразрешающая электроразведка, сейсмоэлектрические методы, электромагнитный мониторинг). Неклассическая геоэлектрика открывает новые перспективы к более тонкому изучению строения геоэлектрической среды и происходящих в ней геодинамических и иных процессов.

Можно выделить несколько основных направлений, вокруг которых сосредоточено большинство современных исследований в области геоэлектрики:

- изучение геоэлектрического строения Земли на континентах и океанах;
- разработка информационно-математического обеспечения геоэлектромантных исследований;
- изучение геодинамических и иных происходящих в Земле процессов;
- изучение проблем неклассической геоэлектрики.

#### **Общие подходы к решению задач геоэлектрики.**

Основная математическая модель теории геоэлектрики - уравнения Максвелла, являющиеся постулатами макроскопической электродинамики. Они включают в себя все основные законы электромагнетизма (законы Ома, Ампера, Кирхгофа и др.) и описывают поля в разных средах. Из уравнений Максвелла получается дифференциальное уравнение, названное телеграфным. Решая его, можно получить электрическую (E) компоненту поля в средах вдали от источника с электромагнитными параметрами  $\rho$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$ :

$$\Delta E = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial E}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad \text{где} \quad \Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}, \quad \epsilon, \mu - \text{диэлектрическая и}$$

магнитная проницаемость,  $\rho$  - плотность среды.

Дифференцирование ведется по декартовым координатам (x, y, z) и времени (t). Уравнение для магнитной (H) компоненты поля аналогично.

Если геоэлектрический разрез известен, то с помощью уравнения (\*) и физических условий задачи, называемых условиями сопряжения, решаются прямые задачи

электроразведки, т.е. получаются аналитические или численные значения  $E$  и  $H$ , которые соответствуют заданному геоэлектрическому разрезу. В теории электроразведки прямые задачи решаются для разных геофизических моделей (ГМ) сред. Под ГМ понимаются абстрактные геоэлектрические разрезы простой геометрической формы, которыми аппроксимируются реальные геолого-геофизические разрезы.

*Сложность решения прямых задач заключается в выборе моделей, близких к реальным, но таких, чтобы для избранного типа первичного поля удалось получить хотя бы приближенное решение для  $E$  или  $H$ . Для этого применяется математическое моделирование с использованием современных средств вычислительной техники. В недалеком прошлом основным способом решения прямых задач для сложных ГМ и разных по структуре типов полей являлось физическое моделирование на объемных или плоскостных моделях сред.*

Наиболее простыми моделями сред являются:

- однородное изотропное пространство или полупространство с одинаковыми электромагнитными свойствами (решения над ними называются соответственно первичным или нормальным полем источника);
- анизотропное пространство или полупространство с электромагнитными свойствами, отличающимися в направлении и в крест слоистости пород;
- одномерные неоднородные среды, в которых свойства меняются в одном направлении. Такими ГМ могут быть, например, вертикальные контакты двух сред, ряд вертикальных пластов или горизонтально слоистая среда с разным электрическим сопротивлением  $\rho$ ;
- двумерные неоднородные среды, в которых электромагнитные свойства меняются в двух направлениях. Примером могут быть наклонные пласты или цилиндры, простирающиеся вдоль одного направления и отличающиеся по электропроводности от вмещающих горных пород;
- трехмерные неоднородные среды, в которых свойства меняются по трем направлениям. Самой простой из подобных моделей является шар с разными значениями  $\rho$ ,  $\alpha$  или  $\eta$  в однородном полупространстве.

В порядке увеличения сложности структуры первичных полей, а значит возрастания сложности решения прямых задач, используемые для электроразведки поля можно расположить в следующей последовательности: точечных и дипольных источников постоянного тока, плоских гармонических электромагнитных волн, сферических волн дипольных гармонических или импульсных источников, цилиндрических волн длинного кабеля и т.п.

### **7. Обратная задача системы уравнений Максвелла в геоэлектрике.**

Накопленный материал по физическому и математическому моделированию прямых задач электроразведки привел к созданию методов решения обратных задач, которым свойственно обращение причинно-следственных связей, в данном случае, например, определению тех или иных параметров геоэлектрического разреза по наблюдаемым графикам, или, например, кривым КС. Решение обратных задач неоднозначно в силу их некорректности, свойственной обратным задачам математической физики (А.Н. Тихонов, М.М. Лаврентьев, В.К. Иванов). Некорректность проявляется в том, что малым изменениям наблюдаемых параметров поля могут соответствовать большие изменения определяемых параметров разреза. Возникающие здесь проблема входит в число основных проблем геофизики.

Этим объясняется, например, невозможность точного определения мощностей ( $h_i$ ) и удельных электрических сопротивлений ( $\rho_i$ ) тонких слоев, горизонтально-слоистого разреза, хотя такие параметры, как продольные проводимости ( $S_i = h_i / \rho_i$ ) либо поперечные сопротивления ( $T_i = h_i \cdot \rho_i$ ), в определенных разрезах рассчитываются однозначно.

Методы решения обратных задач электроразведки являются основой количественной интерпретации данных электроразведки. Сущность их сводится к подбору и сравнению полевых графиков и кривых с теоретическими, полученными в результате

решения прямых задач. Для этого созданы альбомы типичных теоретических кривых (палетки) или компьютерные программы для их расчета и анализа результатов.

Полная система уравнений Максвелла, которая описывает уравнения для электрической и магнитной напряженностей [4], в случае точечного источника и простейшего вида анизотропии имеет вид [4, 5, 6]:

$$j = \text{colon}(1,0,0) * \delta(x_1, x_2) \delta(x_3) \delta(t), \quad (51)$$

$$\varepsilon(z) = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \sigma(z) = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2), \mu(z) = \text{diag}(\mu_1, \mu_1, \mu_2), \quad (52)$$

где функции  $\varepsilon_k, \mu_k, \sigma_k, k = 1, 2$  достаточно гладкие функции при  $x_3 \geq 0, \varepsilon_k > 0, \mu_k > 0, \sigma_k \geq 0$  при  $x \leq 0$ .

Тогда прямая задача системы уравнений Максвелла имеет вид [4]:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}H &= \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + j, \\ \text{rot}E &= -\mu \frac{\partial H}{\partial t}, \quad x \in R^3, x_3 \neq 0, t \in R_+, \end{aligned} \right\}, \quad (53)$$

$$(E, H)|_{t < 0} = 0, \quad (54)$$

$$[E_j]_{x_3=0} = 0, [H_j]_{x_3=0} = 0, j = \overline{1, 2} \quad (55)$$

Обратная задача заключается в определении функции электропроводность -  $\sigma(x_3)$  при  $x_3 > 0$ , известных функциях  $\varepsilon(x_3), \mu(x_3)$  - диэлектрическая и магнитная проницаемость, а также при известной дополнительной решении о прямой задачи.

#### Литература:

1. Федорченко А. М. Классическая электродинамика. – К.: Вища школа, 1988. – 280 с.
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Электричество. – М.: Наука, 1983. – 688 с.
3. Савельев И. В. Курс общей физики. 3 том. – М.: Наука, 1988. – 496 с.
4. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений-Новосибирск:Наука,1988.-166 с.
5. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики– Новосибир.: Наука, 1991.