УДК 517.968

Ж. Ш.Орозмаматова – преп. ОшТУ
J. Sh.Orozmamatova – teacher OshTU

ОДИН КЛАСС ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

В данной статье на основе метода неотрицательных квадратичных форм доказаны теоремы единственности в одном классе для линейных интегральных уравнений первого рода Фредгольма в неограниченных областях.

Ключевые слова: линейные интегральные уравнения, уравнения первого рода, функция, равенства.

ONE CLASS OF LINEAR FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND IN UNBOUNDED DOMAINS

In this article was proved theorems which based on the method of non-negative quadratic forms uniqueness theorems for one class of linear integral equations of the first kind Fredholm in unbounded domains.

Keywords: linear integral equations of the first kind of equation, function, equality.

Рассмотрим уравнение вида

$$Ku \equiv \int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a,\infty), \quad (1)$$

где

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ B(t,s), & a \le t \le s < \infty. \end{cases} \quad (2)$$

Предполагается, что $A(t,s), B(t,s) u\ f(t)$ данные функции, $u(t)-$ искомая функция.

Отметим, что интегральные уравнения первого рода или интегральные уравнения, сводящиеся к ним, ранее изучались частности в [1]-[5], где были получены теоремы единственности, устойчивости и регуляризации. В данном случае, доказывали единственность решения уравнения (1), в пространстве $L_2[a,\infty)$.

В силу (2) уравнение (1) запишем в виде

$$\int_a^t A(t,s)u(s)ds + \int_t^\infty B(t,s)u(s)ds = f(t). \quad (3)$$

Умножая обе части (3) на $u(t)$ и интегрируя по t, получим

$$\int_a^\infty \int_a^t A(t,s)u(s)u(t)dsdt + \int_a^\infty \int_t^\infty B(t,s)u(s)u(t)dsdt = \int_a^\infty f(t)u(t)dt. \quad (4)$$

Применяя формулу Дирихле, из (4) имеем

$$\int_a^\infty\int_a^t A(t,s)u(s)u(t)dsdt+\int_a^\infty\int_a^s B(t,s)u(s)u(t)dtds=\int_a^\infty f(t)u(t)dt,$$

т.е.

$$\int_a^\infty\int_a^t [A(t,s)+B(s,t)]u(s)u(t)dsdt=\int_a^\infty f(t)u(t)dt.$$

Обозначим

$$H(t,s)=\frac{1}{2}[A(t,s)+B(s,t)].$$

Тогда

$$2\int_a^\infty\int_a^t H(t,s)u(s)u(t)dsdt=\int_a^\infty f(t)u(t)dt. \quad (5)$$

Ниже предполагаем, что ядро $H(t,s)$ интегрируемо с квадратом по области $a\le t,s\le b$ т.е. подчинено условию

$$\int_a^b\int_a^t H^2(t,s)dtds=B^2<+\infty. \quad (6)$$

Введём новую функцию $M(t,s)$ следующим образом

$$M(t,s)=\begin{cases} H(t,s), & a\le s\le t<\infty;\\ H(s,t), & a\le t\le s<\infty.\end{cases} \quad (7)$$

Ясно, что

$$M(t,s)=M(s,t).$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\int_a^b\int_a^b |M(t,s)|^2 dsdt=2B^2<\infty.$$

Тогда, известно, что

$$M(t,s)=\sum_{i=1}^\infty\frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i}, \quad (8)$$

где $\lambda_1,\lambda_2,\ldots-$ характеристические числа ядра $M(t,s)$, расположенные в порядке возрастания их модулей, $|\lambda_1|\le|\lambda_2|\le\ldots$ и $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\ldots$ - соответствующие ортонормированные собственные функции.

Теорема. Пусть $M(t,s)$ - полное ядро и $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots$. Тогда решение уравнения (1) в пространстве $L_2[a,\infty)$ единственно.

Доказательство. Пусть уравнение (1) при $f(t)\equiv 0$ имеет ненулевое решение $u(t)\in L_2[a,\infty)$ т.е.

$$\int_a^\infty K(t,s)u(s)ds=f(t)\equiv 0, \text{ почти при всех } t\in[a,\infty).$$

Отсюда

$$2\int_a^\infty\int_a^t H(t,s)u(s)u(t)dsdt = 0 \quad .(9)$$

Учитывая (6), (7) и (8) из (9) получим

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{2}{\lambda_i}\int_a^\infty \varphi_i(t)u(t)\int_a^t \varphi_i(s)u(s)dsdt = 0 \quad ,(10)$$

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\lambda_i}\left|\int_a^\infty \varphi_i(t)u(t)dt\right|^2 = 0 \quad . (11)$$

Тогда

$$\int_a^\infty \varphi_i(t)u(t)dt = 0, \quad (i = 1,2\ldots) \quad . (12)$$

Следовательно, $u(t) = 0$. Теоремадоказана.

Литература:

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 1. с. 31-33.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. // ДАН СССР. 1989. Т. 309. № 5. с. 1052-1055.
4. Asanov A., Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions for Certain Linear Equations of the First Kind with Two Variables- Bulletin of Peoples Friendship of Russia.Moscow, Russia- 2013, №3- C. 30-36.