УДК 531.1

Т. А. Змейкова, Ю.М. Дракунов
Сотр. КазГУ, д.т.н., проф. КазГУ
T. A. Zmeykova, Yu.M. Drakunov
Teacher KazSU, d.t.s., prof., KazSU

# ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД КИНЕТОСТАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЗМА 5-ГО КЛАССА В СИСТЕМЕ MAPLE

*В данной работе предложен векторный метод решения в системе аналитических вычислений Maple одной из важных задач динамического анализа механизмов – кинетостатический анализ. В качестве примера рассмотрен кинетостатический анализ механизма 5-го класса, который заключается в определении реакций в кинематических парах и уравновешивающего момента (силы) на ведущем звене при заданном законе движения механизма.*

*Ключевые слова: векторный метод, кинетостатический анализ, механизм 5-го класса.*

# THE KINETOSTATICHESKY VECTOR METHOD OF THE ANALYSIS OF THE MECHANISM OF THE 5TH CLASS IN MAPLE SYSTEM

*In this work the vector method of the decision in system of analytical calculations of Maple of one of important tasks of the dynamic analysis of mechanisms – the kinetostatichesky analysis is offered. As an example the kinetostatichesky analysis of the mechanism of the 5th class which consists in definition of reactions in kinematic couples and the counterbalancing moment (force) on a leading link at the set law of movement of the mechanism is considered.*

*Keywords: vector method kinetostatic analysis, the mechanism of the 5 th grade.*

Эта задача имеет большое практическое значение при выборе электродвигателя и подборе подшипников в кинематических парах. Так, например, задавшись постоянной угловой скоростью ведущего звена $\omega_1 = const$ можно провести кинематический анализ механизма, а затем решить задачу кинетостатического анализа механизма и определить для всего участка движения $0 \le \varphi_1 \le 2\pi$ уравновешивающий момент и реакции в кинематических парах. По среднему значению уравновешивающего момента определяют параметры электродвигателя, а по экстремальным значениям реакций производят расчет и подбор подшипников, которые будут установлены в шарнирах. Кроме того, знание аналитических выражений реакций позволит наиболее наглядно решать задачи динамики механизмов с учетом сил трения в кинематических парах и задачи оптимального синтеза.

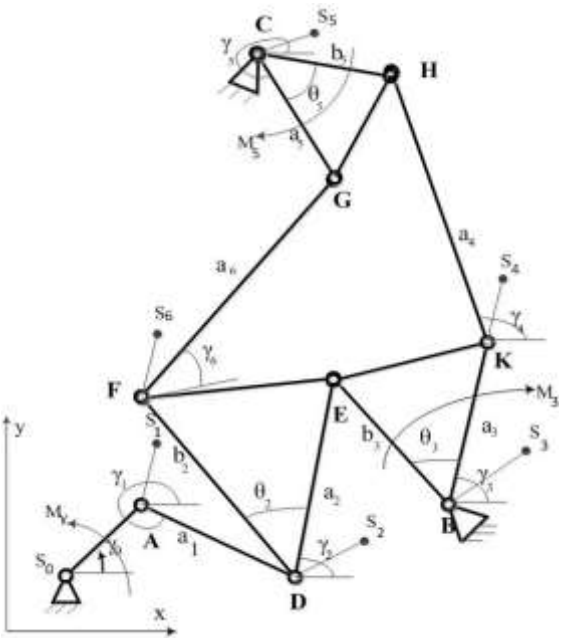

Рисунок 1 - Механизм 5-го класса

Обозначим через $\vec{R}_{ij} = -\vec{R}_{ji}$ $i, j = 0,1,...,7$ (реакции со стороны $i$ на $j$ звено) искомые реакции в кинематических парах и $M_y$ неизвестный уравновешивающий момент на ведущем звене 0. Пусть заданы массы звеньев $m_i$ , моменты инерции звеньев относительно центров масс $J_{S_i}$ , а также силы тяжести звеньев $\vec{G}_i$ (на рисунке не указаны) и момент сопротивления на выходном звене 5 $\vec{M}_5$. Пусть известен закон движения ведущего звена $\gamma_0 = \gamma_0(t)$ . Из решения задачи кинематического анализа можно определить законы движения остальных звеньев механизма [1]. После чего можно найти силы инерции центров масс $-m_i\vec{W}_{S_i}$ и моменты сил инерции звеньев $-J_{S_i}\varepsilon_i$ .

Уравнения равновесия семи подвижных звеньев механизма по принципу Даламбера можно записать

$$\sum_j \vec{F}_{j,i} - m_i\vec{W}_{S_i} = 0, \quad \sum_j M_{S_i}(\vec{F}_{j,i}) - J_{S_i}\varepsilon_i\vec{k} = 0, \quad i = 0,..,6 \qquad (1)$$

здесь $\vec{F}_{j,i}$ - активные и реактивные силы, действующие на $i$ звено. Распишем (1) для каждого звена, считая статически уравновешенным ведущее звено 0.

$$\vec{R}_{70} + \vec{R}_{10} + \vec{G}_0 = 0, \quad \vec{a}_1 \times \vec{R}_{10} + M_y\vec{k} - J_{S_0}\varepsilon_0\vec{k} = 0 \qquad (2)$$

$$\vec{R}_{01} + \vec{R}_{21} + \vec{G}_1 - m_1\vec{W}_{S_1} = 0, \quad (\vec{a}_1 - \vec{r}_1) \times \vec{R}_{21} - \vec{r}_1 \times \vec{R}_{01} - J_{S_1}\varepsilon_1\vec{k} = 0 \qquad (3)$$

$$\begin{gathered} \vec{R}_{12} + \vec{R}_{32} + \vec{R}_{62} + \vec{G}_2 - m_2\vec{W}_{S_2} = 0, \\ (\vec{b}_2 - \vec{r}_2) \times \vec{R}_{62} + (\vec{a}_2 - \vec{r}_2) \times \vec{R}_{32} - \vec{r}_2 \times \vec{R}_{12} - J_{S_2}\varepsilon_2\vec{k} = 0 \end{gathered} \qquad (4)$$

$$\begin{gathered} \vec{R}_{73} + \vec{R}_{23} + \vec{R}_{43} + \vec{G}_3 - m_3\vec{W}_{S_3} = 0, \\ (\vec{b}_3 - \vec{r}_3) \times \vec{R}_{23} + (\vec{a}_3 - \vec{r}_3) \times \vec{R}_{43} - \vec{r}_3 \times \vec{R}_{73} - J_{S_3}\varepsilon_3\vec{k} - M_3\vec{k} = 0 \end{gathered} \qquad (5)$$

$$\vec{R}_{34} + \vec{R}_{54} + \vec{G}_4 - m_4\vec{W}_{S_4} = 0, \quad (\vec{a}_4 - \vec{r}_4) \times \vec{R}_{54} - \vec{r}_4 \times \vec{R}_{34} - J_{S_4}\varepsilon_4\vec{k} = 0 \qquad (6)$$

$$\vec{R}_{45}+\vec{R}_{75}+\vec{R}_{65}+\vec{G}_5-m_5\vec{W}_{S_5}=0,$$
$$(\vec{b}_5-\vec{r}_5)\times\vec{R}_{45}+(\vec{a}_5-\vec{r}_5)\times\vec{R}_{65}-\vec{r}_5\times\vec{R}_{75}-M_5\vec{k}-J_{S_5}\varepsilon_5\vec{k}=0 \qquad (7)$$
$$\vec{R}_{26}+\vec{R}_{56}+\vec{G}_6-m_6\vec{W}_{S_6}=0,$$
$$(\vec{a}_6-\vec{r}_6)\times\vec{R}_{56}-\vec{r}_6\times\vec{R}_{26}-J_{S_6}\varepsilon_6\vec{k}=0 \qquad (8)$$

Для простоты введем обозначения

$$\vec{Q}_i=\vec{G}_i-m_i\vec{W}_{S_i},\quad \vec{J}_i=J_{S_i}\varepsilon_i\vec{k},\quad i=0,1,2,3,4,5,6$$

После этого уравнения (2)-(8) можно записать в следующем упрощенном виде:

$$\vec{a}_1\times\vec{R}_{21}+\vec{r}_1\times\vec{Q}_1-\vec{J}_1=0 \qquad (9)$$
$$\vec{b}_2\times\vec{R}_{62}+\vec{a}_2\times\vec{R}_{32}+\vec{r}_2\times\vec{Q}_2-\vec{J}_2=0 \qquad (10)$$
$$\vec{b}_3\times\vec{R}_{23}+\vec{a}_3\times\vec{R}_{43}+\vec{r}_3\times\vec{Q}_3-\vec{J}_3=0 \qquad (11)$$
$$\vec{a}_4\times\vec{R}_{54}+\vec{r}_4\times\vec{Q}_4-\vec{J}_4=0 \qquad (12)$$
$$\vec{b}_5\times\vec{R}_{45}+\vec{a}_5\times\vec{R}_{65}+\vec{r}_5\times\vec{Q}_5-\vec{J}_5-M_5\vec{k}=0 \qquad (13)$$
$$\vec{a}_6\times\vec{R}_{56}+\vec{r}_6\times\vec{Q}_6-\vec{J}_6=0 \qquad (14)$$

Предыдущие уравнения являются однотипными и для их формирования в системе Maple были использованы следующие процедуры

```
> eqRM2 := proc(i, j, k, R, P, l, r, J, M)
    R[i, j] + R[k, j] + P[j] = 0, l[j] &x R[k, j] + r[j] &x P[j] - J[j] + M[j]·_k = 0;
  end:
> eqRM2(1, 2, 3, R_, P_, l_, r_, J_, M);
```

$$\vec{R}_{1,2}+\vec{R}_{3,2}+\vec{P}_2=0,\ M_2\vec{k}+\vec{l}_2\times\vec{R}_{3,2}+\vec{r}_2\times\vec{P}_2-\vec{J}_2=0$$

```
>
> eqRM3 := proc(i, j, k, m, R, P, l, L, r, J, M)
    R[i, j] + R[k, j] + R[m, j] + P[j] = 0, l[j] &x R[k, j] + L[j] &x R[m, j] + r[j] &x P[j] - J[j] + M[j]·_k = 0;
  end:
> eqRM3(1, 2, 3, 4, R_, P_, l_, L_, r_, J_, M);
```

$$\vec{R}_{1,2}+\vec{R}_{3,2}+\vec{R}_{4,2}+\vec{P}_2=0,\ M_2\vec{k}+\vec{l}_2\times\vec{R}_{3,2}+\vec{L}_2\times\vec{R}_{4,2}+\vec{r}_2\times\vec{P}_2-\vec{J}_2=0$$

Процедура eqRM2() используется для записи уравнений равновесия двухшарнирного звена, а процедура eqRM3() используется для записи уравнений равновесия трехшарнирного звена. После каждой процедуры приведены соответствующие примеры обращения к процедурам.

Последние три уравнения (12)-(14) можно записать в виде:

$$\vec{a}_4\times\vec{R}_{45}=\vec{P}_4\ ,\quad \text{где}\ \ \vec{P}_4=\vec{r}_4\times\vec{Q}_4-\vec{J}_4$$
$$\vec{b}_5\times\vec{R}_{45}-\vec{a}_5\times\vec{R}_{56}=\vec{P}_5\ ,\quad \text{где}\ \ \vec{P}_5=\vec{r}_5\times\vec{Q}_5-\vec{J}_5-M_5\vec{k}$$

$$\vec{a}_6 \times \vec{R}_{56} = \vec{P}_6 \ , \qquad \text{где} \ \ \vec{P}_6 = \vec{r}_6 \times \vec{Q}_6 - \vec{J}_6$$

Выразим $\vec{R}_{62} = \vec{R}_{56} + \vec{Q}_6$ , $\vec{R}_{43} = -\vec{R}_{45} + \vec{Q}_4$ из (6) и (8), получим соответственно:

$$\vec{b}_2 \times \vec{R}_{56} - \vec{a}_2 \times \vec{R}_{23} = \vec{P}_2 \ , \ \text{где} \ \ \vec{P}_2 = \vec{b}_2 \times \vec{Q}_6 + \vec{r}_2 \times \vec{Q}_2 - \vec{J}_2$$

$$\vec{b}_3 \times \vec{R}_{23} - \vec{a}_3 \times \vec{R}_{45} = \vec{P}_3 \ , \ \text{где} \ \ \vec{P}_3 = \vec{a}_3 \times \vec{Q}_4 + \vec{r}_3 \times \vec{Q}_3 - \vec{J}_3$$

Окончательно получены векторные уравнения, выраженные через $\vec{P}_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$:

$$\vec{a}_1 \times \vec{R}_{21} = \vec{P}_1 \tag{15}$$

$$\vec{b}_2 \times \vec{R}_{56} - \vec{a}_2 \times \vec{R}_{23} = \vec{P}_2 \tag{16}$$

$$\vec{b}_3 \times \vec{R}_{23} - \vec{a}_3 \times \vec{R}_{45} = \vec{P}_3 \tag{17}$$

$$\vec{a}_4 \times \vec{R}_{45} = \vec{P}_4 \tag{18}$$

$$\vec{b}_5 \times \vec{R}_{45} - \vec{a}_5 \times \vec{R}_{56} = \vec{P}_5 \tag{19}$$

$$\vec{a}_6 \times \vec{R}_{56} = \vec{P}_6 \tag{20}$$

Решение уравнений (15), (18) и (20) может быть записано

$$\vec{R}_{21} = \lambda_1 \vec{a}_1 + 1/a_1^2 (\vec{P}_1 \times \vec{a}_1) \tag{21}$$

$$\vec{R}_{45} = \lambda_4 \vec{a}_4 + 1/a_4^2 (\vec{P}_4 \times \vec{a}_4) \tag{22}$$

$$\vec{R}_{56} = \lambda_6 \vec{a}_6 + 1/a_6^2 (\vec{P}_6 \times \vec{a}_6) \tag{23}$$

где $\lambda_i$ - произвольный параметр

Для получения решения (21)-(23) была использована следующая процедура решения векторного уравнения

```
> #Простейшие векторные уравнения
> opr :=proc(a, b, Λ) #a×r=b
    Λ·a + (b &x a)/(a.a);
  end:
> r_ = opr(a_, b_, λ);
```

$$\vec{r} = \lambda \vec{a} + \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}$$

После процедуры opr () приведен пример обращения к ней.

Подставляя уравнения (21)-(23) в (16), (17) и (19) получим систему уравнений для определения $\lambda_1$ , $\lambda_4$ , $\lambda_6$ :

$$\vec{b}_5 \times \vec{a}_4 \lambda_4 - \vec{a}_5 \times \vec{a}_6 \lambda_6 = \vec{\sigma}_1 \tag{24}$$

$$(\vec{a}_2 - \vec{b}_2) \times \vec{a}_6 \lambda_6 - \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \lambda_1 = \vec{\sigma}_2 \tag{25}$$

$$\vec{b}_3 \times \vec{a}_6 \lambda_6 - \vec{b}_3 \times \vec{a}_1 \lambda_1 - \vec{a}_3 \times \vec{a}_4 \lambda_4 = \vec{\sigma}_3 \tag{26}$$

где

$$\vec{\sigma}_1 = \vec{P}_4 - \vec{P}_5 + \vec{b}_5 \times \vec{R}_{45}\ ,\quad \vec{\sigma}_2 = \vec{P}_6 + \vec{a}_2 \times \vec{Q}_0\ ,\ \vec{\sigma}_3 = \vec{b}_3 \times \vec{Q}_0 - \vec{a}_3 \times \vec{R}_{45}$$

Решая уравнения (24) – (26), найдем $\lambda_1, \lambda_4, \lambda_6$

$$\lambda_1 = \frac{D_1}{D}\ ,\ \lambda_4 = \frac{D_4}{D}\ ,\ \lambda_6 = \frac{D_6}{D}\ , \qquad (27)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \vec{b}_5 \times \vec{a}_4 & -\vec{a}_5 \times \vec{a}_6 \\ -\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 & 0 & \left(\vec{a}_2 - \vec{b}_2\right) \times \vec{a}_6 \\ -\vec{b}_3 \times \vec{a}_1 & -\vec{a}_3 \times \vec{a}_4 & \vec{P}_3 \times \vec{a}_6 \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \vec{b}_5 \times \vec{a}_4 & -\vec{a}_5 \times \vec{a}_6 \\ \sigma_2 & 0 & \left(\vec{a}_2 - \vec{b}_2\right) \times \vec{a}_6 \\ \sigma_3 & -\vec{a}_3 \times \vec{a}_4 & \vec{P}_3 \times \vec{a}_6 \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & \vec{\sigma}_1 & -\vec{a}_5 \times \vec{a}_6 \\ -\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 & \vec{\sigma}_2 & \left(\vec{a}_2 - \vec{b}_2\right) \times \vec{a}_6 \\ -\vec{b}_3 \times \vec{a}_1 & \vec{\sigma}_3 & \vec{P}_3 \times \vec{a}_6 \end{vmatrix} \qquad D_6 = \begin{vmatrix} 0 & \vec{b}_5 \times \vec{a}_4 & \vec{\sigma}_1 \\ -\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 & 0 & \vec{\sigma}_2 \\ -\vec{b}_3 \times \vec{a}_1 & -\vec{a}_3 \times \vec{a}_4 & \vec{\sigma}_3 \end{vmatrix}$$

Далее по формулам (21)-(23) и (2)-(8) определяем остальные искомые реакции.

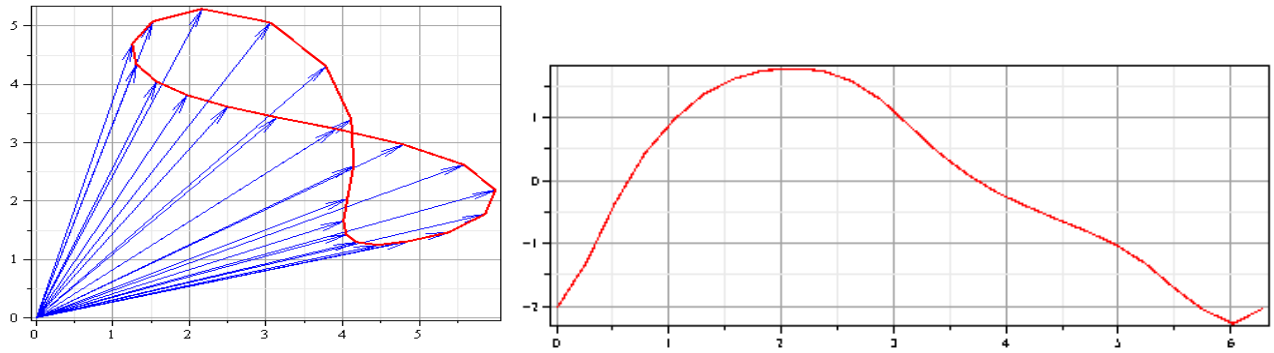

Рисунок 2 - Годограф реакции $\vec{R}_{01}$ и уравновешивающий момент $M_y$

Для конкретного примера на рисунке 2 изображен годограф реакции $\vec{R}_{01}$ и график уравновешивающего момента $M_y$.

**Литература:**


1. Механика машин. Учебное пособие для вузов / Под редакцией проф. Г.А. Смирнова; Авторы: И.И. Вульфсон, М.З. Коловский, Э.Е. Пейсах и др. - Москва, издательство "Высшая школа", 1996, 511 с.
2. Джолдасбеков У. А., Молдабеков М. М. Аналитические методы анализа и синтеза механизмов высоких классов. – Алматы, 1997г.