УДК 129

М.У. Утенов, А.Ж. Сейдахмет, Б.А. Еспаев
преп. КазГУ, преп. КазГУ, преп. КазГУ
M. U. Utenov, A. Zh. Seydakhmet, B. A. Espayev
Teacher KazSU, teacher KazSU, teacher KazSU

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОДВИЖНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В статье приведен аналитический метод динамического расчета на прочность и жесткость плоских подвижных стержневых систем со статически определимыми структурами, при действии на элементы этих систем распределенных инерционных нагрузок трапецеидального вида.

Ключевые слова: стержень, инерционные силы, деформация.

THE DYNAMIC ANALYSIS INTENSE THE DEFORMED CONDITION OF MOBILE ROD SYSTEMS

The analytical method of dynamic calculation is given in article on durability and rigidity of flat mobile rod systems with statically definable structures, at action on elements of these systems of the distributed inertial loadings of a trapezoidal kind.

Keywords: rod, inertial forces, deformation.

Во время движения стержневых механизмов в его звеньях появляются распределенные инерционные силы сложного характера. Интенсивность распределения инерционных сил вдоль звена зависит от распределения масс вдоль звена и от быстроменяющихся кинематических характеристик механизма. При возникновении таких нагрузок появляется ряд проблем, например: проблемы разрушения, обусловленного большими силами инерций; упругие деформации механизма могут быть значительными, что может вывести механизм из строя; из-за больших деформаций звеньев механизм не может удовлетворять кинематическим требованиям.

Чтобы более точно прогнозировать характер поведения той или иной системы в заданных условиях, необходимо располагать более совершенной математической моделью этой системы.

Основным из подходов к решению этих проблем, является исследование внутренних усилий, напряжений и деформаций звеньев проектируемого механизма.

Рассмотрим плоскопараллельное движение k - го звена механизма с постоянными сечениями относительно неподвижной системы координат OXY (рис.1). С началом в точке O введем также систему координат $OX'Y'$, положение которой относительно неподвижной системы координат OXY, определяется углом θ_k. С началом в шарнире, связывающее k - тое с $(k-1)$ - ым звеном, введем две локальные системы координат. Систему координат $P_k X_k Y_k$ перемещающихся вместе со связанным шарниром, и с осями, остающимися соответственно параллельным к осям системы координат OXY, а также систему координат $PX'_k Y'_k$ жестко связанным со звеном k.

Для этого звена определены следующие законы распределения поперечных и продольных инерционных сил вдоль звена, возникающих от собственных масс звена:

$$q_k\left(x'_k\right) = a_{kq} + b_{kq} x'_k, \tag{1}$$

$$n_k\left(x'_k\right) = a_{kn} + b_{kn} x'_k, \tag{2}$$

где

$$a_{kq} = -\gamma_k A_k \cos\theta_k - \frac{\gamma_k A_k}{g} w_{kp}^{y_k'},\ \ b_{kq} = -\frac{\gamma_k A_k}{g}\varepsilon_k .\ \ a_{kn} = -\gamma_k A_k \sin\theta_k - \frac{\gamma_k A_k}{g} w_{kp}^{x_k'},\ \ b_{kn} = \frac{\gamma_k A_k}{g}\omega_k^2,$$

θ_k - угол, определяющий положение звена k относительно неподвижной системе координат OXY, ω_k, ε_k - соответственно угловая скорость и угловое ускорение звена k, $w_{kp}^{x_k'}$ и $w_{kp}^{y_k'}$ - компоненты ускорения точки P_k (полюс) звена k относительно неподвижной системы координат OXY, γ_k - удельный вес материала звена k, A_k - площадь поперечного сечения звена k, g - ускорение свободного падения.

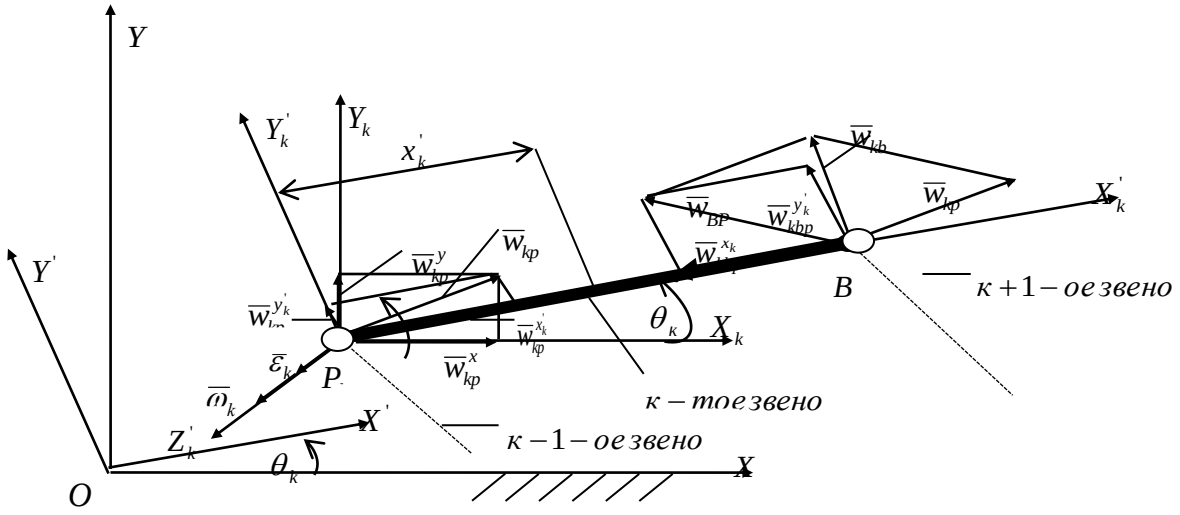


Рисунок 1 - Плоскопараллельное движение k - того звена

По найденным выражениям можно увидеть, что для звена с постоянными сечениями поперечные и продольные инерционные силы вдоль оси звена распределены по трапецеидальному закону

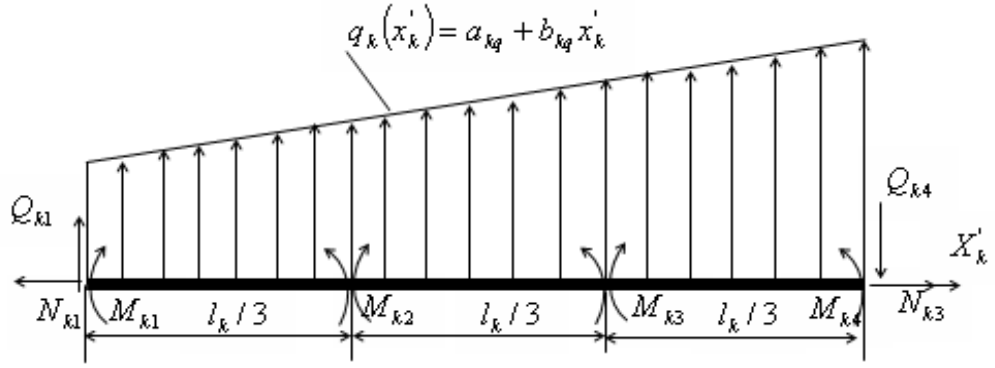


Рисунок 2- Элемент, находящийся под действием распределенной поперечной нагрузки трапецеидального вида

Для k - го элемента, подверженного действию поперечной распределенной нагрузки трапецеидального вида (рисунок 2), изгибающие моменты по длине элемента распределены по закону полинома третьей степени:

$$M_k(x_k') = a_0 + a_1 x_k' + a_2 (x_k')^2 + a_3 (x_k')^3. \qquad (3)$$

Выразим изгибающий момент в сечение $x_k^{'}$ с помощью изгибающих моментов M_{k1}, $.M_{k2}$, M_{k3}, M_{k4} в указанных сечениях рис.2.

Для этого достаточно коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 выразить через M_{k1}, $.M_{k2}$, M_{k3}, M_{k4}. В результате имеем:

$$M_k\left(x_k^{'}\right)=\left[1-\frac{11}{2l_k}x_k^{'}+\frac{9}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2-\frac{9}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]M_{k1}+\left[\frac{9}{l_k}x_k^{'}-\frac{45}{2l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2+\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]M_{k2}$$
$$+\left[-\frac{9}{2l_k}x_k^{'}+\frac{18}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2-\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]M_{k3}+\left[\frac{1}{l_k}x_k^{'}-\frac{9}{2l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2+\frac{9}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]M_{k4}. \quad (4)$$

Дифференцируя $M_k\left(x_k^{'}\right)$ по $x_k^{'}$, получим выражение поперечной силы:

$$Q_k\left(x_k^{'}\right)=\left[-\frac{11}{2l_k}+\frac{18}{l_k^2}x_k^{'}-\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^2\right]M_{k1}+\left[\frac{9}{l_k}-\frac{45}{l_k^2}x_k^{'}+\frac{81}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^2\right]M_{k2}+$$
$$\left[-\frac{9}{2l_k}+\frac{36}{l_k^2}x_k^{'}-\frac{81}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^2\right]M_{k3}+\left[\frac{1}{l_k}-\frac{9}{l_k^2}x_k^{'}+\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^2\right]M_{k4}. \quad (5)$$

Пусть, кроме поперечной распределенной нагрузки, на элемент действует продольная распределенная нагрузка, трапецеидального вида. Тогда продольную силу в любом сечении элемента можно выразить аналогично к предыдущему с помощью продольных сил в расчетных сечениях следующим образом:

$$N_k\left(x_k^{'}\right)=\left[1-\frac{3}{l_k}x_k^{'}+\frac{2}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2\right]N_{k1}+\left[\frac{4}{l_k}x_k^{'}-\frac{4}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2\right]N_{k2}+\left[-\frac{1}{l_k}x_k^{'}+\frac{2}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2\right]N_{k3}. \quad (6)$$

Таким образом, для элемента, находящегося под действиями поперечных и продольных распределенных нагрузок трапецеидального вида, матрица аппроксимации, связывающая внутренние усилия в любом сечение элемента со значениями внутренних усилий в расчетных сечениях, имеет вид:

$$\left[H_k\left(x_k^{'}\right)\right]=\begin{bmatrix} h_{11}\left(x_k^{'}\right) & h_{12}\left(x_k^{'}\right) & h_{13}\left(x_k^{'}\right) & h_{14}\left(x_k^{'}\right) & 0 & 0 & 0 \\ h_{21}\left(x_k^{'}\right) & h_{22}\left(x_k^{'}\right) & h_{23}\left(x_k^{'}\right) & h_{24}\left(x_k^{'}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{35}\left(x_k^{'}\right) & h_{36}\left(x_k^{'}\right) & h_{37}\left(x_k^{'}\right) \end{bmatrix}; \quad (7)$$

где $h_{11}\left(x_k^{'}\right)=\left[1-\frac{11}{2l_k}x_k^{'}+\frac{9}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2-\frac{9}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]$, $h_{12}\left(x_k^{'}\right)=\left[\frac{9}{l_k}x_k^{'}-\frac{45}{2l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2+\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]$,

$h_{13}\left(x_k^{'}\right)=\left[-\frac{9}{2l_k}x_k^{'}+\frac{18}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2-\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]$, $h_{14}\left(x_k^{'}\right)=\left[\frac{1}{l_k}x_k^{'}-\frac{9}{2l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2+\frac{9}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]$,

$h_{21}\left(x_k^{'}\right)=\left[-\frac{11}{2l_k}x_k^{'}+\frac{18}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2-\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]$, $h_{22}\left(x_k^{'}\right)=\left[\frac{9}{l_k}-\frac{45}{l_k^2}x_k^{'}+\frac{81}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^3\right]$,

$h_{23}\left(x_k^{'}\right)=\left[-\frac{9}{2l_k}+\frac{36}{l_k^2}x_k^{'}-\frac{81}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^2\right]$, $h_{24}\left(x_k^{'}\right)=\left[\frac{1}{l_k}-\frac{9}{l_k^2}x_k^{'}+\frac{27}{2l_k^3}\left(x_k^{'}\right)^2\right]$,

$h_{35}=\left[1-\frac{3}{l_k}x_k^{'}+\frac{2}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2\right]$, $h_{36}\left(x_k^{'}\right)=\left[\frac{4}{l_k}x_k^{'}-\frac{4}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2\right]$, $h_{37}\left(x_k^{'}\right)=\left[-\frac{1}{l_k}x_k^{'}+\frac{2}{l_k^2}\left(x_k^{'}\right)^2\right]$.

Приведенное выражение матрицы аппроксимации усилий определяет зависимость между вектором усилий $\{S_k(x_k^{'})\}$ в любом сечении $x_k^{'}$ элемента и вектором усилий в назначенных сечениях $\{S_k\}$. Для элемента стержневой системы матрица аппроксимации получена точным, т.к. она составлена на основании известных законов распределения искомых усилий.

В этой статье также рассмотрена задача о построении дискретных моделей упругого расчета плоских стержневых механизмов. Из уравнений изгибающего момента, поперечных и продольных сил (4,5,6), выраженных этими же величинами в расчетных сечениях, заметим, что для определения внутренних усилий каждого элемента механизма достаточно знать значения этих усилий в конечном числе сечений каждого из этих элементов. Количество сечений, в которых необходимо знать значения внутренних усилий, определяются степенями полиномов внешних воздействий. Таким образом, внутренние усилия каждого континуального звена однозначно определяются набором внутренних усилий в отдельных его сечениях и матриц аппроксимаций, поэтому задача сводится к вычислению внутренних усилий в конечном числе сечений элементов. В результате чего, приходим к дискретной модели упругого расчета звеньев стержневых механизмов.

Для упругого расчета стержневых механизмов на основе принципа Даламбера приложим к звеньям все инерционные, внешние силы, силы тяжести звеньев, а к ведущим звеньям приложим неизвестные движущие моменты (силы), обеспечивающие заданные законы их движения. Тогда получим конструкции, степень подвижности которых равна нулю, если заменить шарниры, соединяющие ведущее звено со стойкой жестким защемлением.

Для определения внутренних усилий в звеньях (в элементах) расчетной схемы механизма, конструкцию разделим на элементы и узлы (см. рисунок 3).

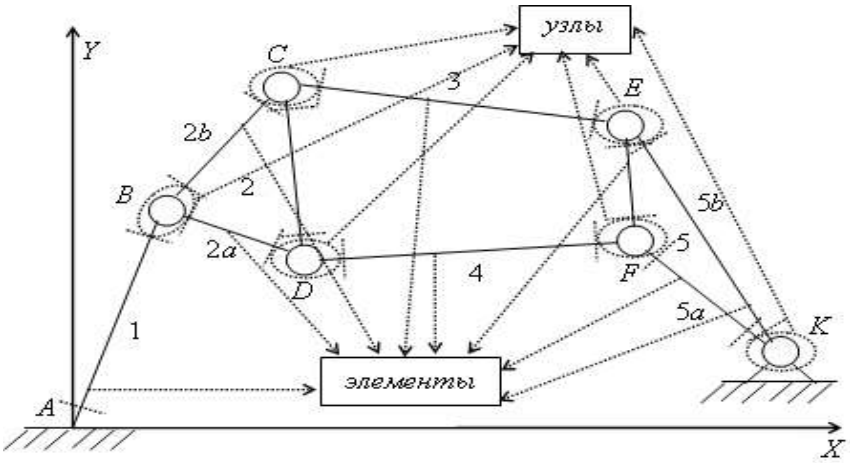


Рисунок 3 - Разделение механизма четвертого класса на элементы и узлы

Элементами могут быть звено или часть звена, а узлами - шарниры, соединяющие смежные звенья и сечения, где приложены сосредоточенные внешние силы.

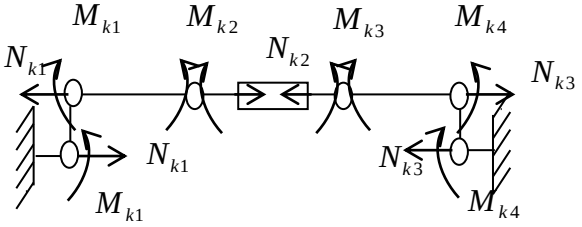
При разделении элементов расчетной схемы конструкции на расчетные сечения и узлы необходимо установить, какие внутренние связи между элементами остаются, а какие удаляются. Если отбросим какие-то внутренние связи или их сочетания в элементе, то элемент распадается на два элемента, которые могут повернуться, сдвинуться или удалиться относительно друг друга. Чтобы этого не произошло, в местах отброшенных связей необходимо приложить внутренние силы-усилия. В дальнейшем эти усилия будем считать основными неизвестными.

Элемент разделим на три типа. Первый тип элемента - это балка, оба конца которой закреплены жестко. К таким балкам относятся стержни базисного звена, которые соединены между собой жестко. Второй тип элемента - это балка, один конец которой закреплен жестко, а другой конец шарнирно-неподвижно. К таким балкам можно отнести ведущие звенья плоских стержневых механизмов. Третий тип элемента – это шарнирно опертые по концам балки. Дискретные модели таких балок позволяют определять количество независимых динамических уравнений равновесия; дискретные модели балок также определяют количество компонентов вектора усилий в расчетных сечениях.

Для определения внутренних усилий в звеньях (в элементах) расчетной схемы механизма, конструкцию разделим на элементы и узлы. Элементами могут быть звено или часть звена, а узлами - шарниры, соединяющие смежные звенья и сечения, где приложены сосредоточенные внешние силы.

Элемент разделим на три типа. Первый тип элемента - это балка, оба конца которой закреплены жестко. К таким балкам относятся стержни базисного звена, которые соединены между собой жестко.

Рисунок 4 - Дискретная модель балки первого типа, при действии на балку распределенной нагрузки трапецеидального вида



В работе также была построена дискретная модель такого элемента, который имеет вид – см. рисунок 4. Степень свободы полученной дискретной модели балки определим по формуле:

$$k = 3K - Ш, \tag{10}$$

где K-число замкнутых контуров, $Ш$-число простых (одиночных) шарниров, k-степень статической неопределимости расчетной схемы механизма.

Между степенью свободы дискретной модели m, числом приложенных внешних усилий n и степенью статической неопределимости расчетной схемы k существует зависимость [3]:

$$m = n - k \tag{11}$$

Степень свободы дискретной модели m определяет количество необходимых независимых уравнений статики.

Количество неизвестных дискретной модели балки $n = 7$. Рассматриваемая балка трижды статически неопределима, т.е. $k = 3$. Тогда степень свободы дискретной модели балки будет равна $m = 4$. Значит, можно составить четыре независимых уравнения равновесия для полученной дискретной модели рассматриваемой балки.

Получено следующая система уравнений для дискретной модели балки первого типа, при действии на балку распределенной нагрузки трапецеидального вида:

$$[A_k]\{S_k\} = \{F_k\}, \tag{12}$$

где

$$[A_k]=\begin{bmatrix} -\frac{27}{l_k^3} & \frac{81}{l_k^3} & -\frac{81}{l_k^3} & \frac{27}{l_k^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{9}{2} & 9 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{l_k^2} & -\frac{8}{l_k^2} & \frac{4}{l_k^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\{S_k\}=\{M_{k1},M_{k2},M_{k3},M_{k4},N_{k1},N_{k2},N_{k3}\}^T,$$

$$\{F_k\}=\left\{ b_{kq},\quad -a_{kq}\frac{l_k^2}{2}-b_{kq}\frac{l_k^3}{6},\quad -b_{kn},\quad -a_{kn}l_k-b_{kn}\frac{l_k^2}{2}\right\}^T,$$

$M_{k1},M_{k2},M_{k3},M_{k4}$ и N_{k1},N_{k2},N_{k3} соответственно искомые изгибающие моменты, и продольные силы в расчетных сечениях k элемента; l_k- длина k элемента.

А также получена система уравнений для дискретной модели всех типов балок, при воздействии на балки распределенной нагрузки трапецеидального и параболического видов. Для решения задач необходимо, кроме динамического уравнения равновесия элемента, уравнения равновесия узлов. Узлы могут быть шарнирными и жесткими. Если в узлах все стержни соединены между собой шарнирно, то такие узлы назовем шарнирными, и уравнений равновесия для таких узлов будут два. Все силы в сечениях, прилегающих к узлу, спроектируем на взаимно перпендикулярные оси, сумма проекций которых должна равняться нулю. Если в узле соединены хотя бы два стержня жестко (сюда относятся сечения, где приложены сосредоточенные внешние силы), то такие узлы назовем жесткими, и для таких узлов число уравнений равновесия будут равно трем. В данном случае к вышесказанным уравнениям добавляется уравнение моментов. Получены уравнения равновесия шарнирных и жестких узлов при нагружении элемента трапецеидальными нагрузками. Установлены связи между компонентами вектора усилий в расчетных сечениях смежных элементов и внешними сосредоточенными нагрузками, приложенными к этому узлу. Матрица уравнений равновесия для дискретной модели механизмов состоит из матриц уравнений равновесия отдельных их элементов, а также из уравнений равновесия их узлов. Матрица уравнений равновесия дискретных моделей механизмов выглядит следующим образом:

$$[A]=\begin{bmatrix} [A_1] & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & [A_2] & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & [A_n] \\ \multicolumn{6}{c}{Уравн.\ равновесия\ узлов} \end{bmatrix}.$$

Силовой вектор и вектор усилий в расчетных сечениях дискретных моделей механизмов формируются от силовых векторов и векторов усилий в расчетных сечениях отдельных их элементов. Эти вектора соответственно имеют следующие виды: $\{F\}=\{\{F_1\},\{F_2\},\ldots,\{F_n\}\}^T$; $\{S\}=\{\{S_1\},\{S_2\},\ldots,\{S_n\}\}^T$.

Матрица уравнений равновесия $[A]$ для дискретной модели механизма состоит из матриц уравнений динамического равновесия отдельных элементов, а также из уравнений равновесия узлов. Для механизмов, структура которых содержит статически определимые группы Асура, количество неизвестных равно количеству уравнений равновесия, поэтому для определения компонентов вектора усилий $\{S\}$ в расчетных сечениях достаточно решить уравнение $[A]\{S\}=\{F\}$.

Силовой вектор и вектор усилий в расчетных сечениях для дискретных моделей механизмов формируются от силовых векторов и векторов усилий в расчетных сечениях отдельных их элементов.

Литература:

1. Утенов М.У. Исследования сил, возникающих от собственных масс звеньев с постоянными и переменными сечениями при их плоскопараллельном движении: материалы первой международной научно-практической конференции. Транспорт Евразии: взгляд XXI век. 18-19 октября 2000г. -Т.2., Алматы: Издательство «БАСТАУ». - 2000.-С.30-34.
2. Утенов М.У. Матрица аппроксимации усилий элемента, подверженного действию распределенной нагрузки с интенсивностью параболического типа: материалы первой международной научно-практической конференции. Транспорт Евразии: взгляд XXI век. 18-19 октября 2000г. -Т.2., Алматы: Издательство «БАСТАУ». - 2000.-С.55-58.
3. Чирас А.А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1989. -255с.
4. Утенов М.У. Построения дискретных моделей плоских стержневых механизмов при упругом расчете //ВЕСТНИК Казахской Академии Транспорта и Коммуникаций.-2001.-№6 [12].-С.61-64.