УДК 125

Ю.М. Дракунов, А.В. Шахворостова
д.т.н. проф. КазГУ, Д.т.н.,проф., КазГУ
Yu. M. Drakunov, A.V. Shakhvorostova
d.t.s., prof., KazSU, d.t.s., prof., KazSU.

СИНТЕЗ ПЛОСКОГО РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА 3го КЛАССА по 5-ти ПАРАМЕТРАМ

Рассматривается задача об определении оптимальных длин звеньев плоских рычажных механизмов 3го класса. В работе был использован общий метод синтеза плоских рычажных механизмов по заданным законам движения входного и выходного звеньев, основанный на использовании исходных кинематических цепей с вращательными парами. Данный метод синтеза позволяет получить все возможные структуры плоских механизмов, позволяет построить целевую функцию и синтезировать механизм по полному числу параметров, учитывая ограничения на эти параметры. Все вычисления реализованы в системе аналитических вычислений Maple и в среде Microsoft Visual Studio 2010.

Ключевые слова: рычажный механизм, параметры, координаты, функция.

SYNTHESIS OF THE FLAT LEVER MECHANISM OF THE 3RD CLASS IN 5 PARAMETERS

The task about determination of optimum lengths of links of flat lever mechanisms of the 3rd class is considered. In work the general method of synthesis of flat lever mechanisms under the set laws of movement of the entrance and output links, based on use of initial kinematic chains with rotary couples was used. This method of synthesis allows to receive all possible structures of flat mechanisms, allows to construct criterion function and to synthesize the mechanism on full number of parameters, considering restrictions on these parameters. All calculations are realized in system of analytical calculations of Maple and in the environment of Microsoft Visual Studio 2010.

Keywords: link mechanism, the parameters, the coordinates of the function.

Рассмотрен метод определения оптимальных длин звеньев плоского рычажного механизма 3-го класса по 5 параметрам (задача об определении круговых точек).

Постановка задачи. Требуется синтезировать плоский передаточный рычажный механизм 3-го класса.

Пусть на неподвижной плоскости $XO'Y$ задано движение двух подвижных плоскостей xA_iy и uD_iv, связанных с движением входного и выходного звеньев, т.е. заданы координаты, и углы поворота для N положений подвижных плоскостей как функции времени t_i

$$X_{A_I} = X_{A_I}(t_i),\ Y_{A_I} = Y_{A_I}(t_I),\ \varphi_{1i} = \varphi_{1i}(t_i),$$
$$X_{D_i} = X_{D_i}(t_i),\ Y_{D_i} = Y_{D_i}(t_i),\ \varphi_{4i} = \varphi_{4i}(t_i),\ i = 1, 2, ..., N$$

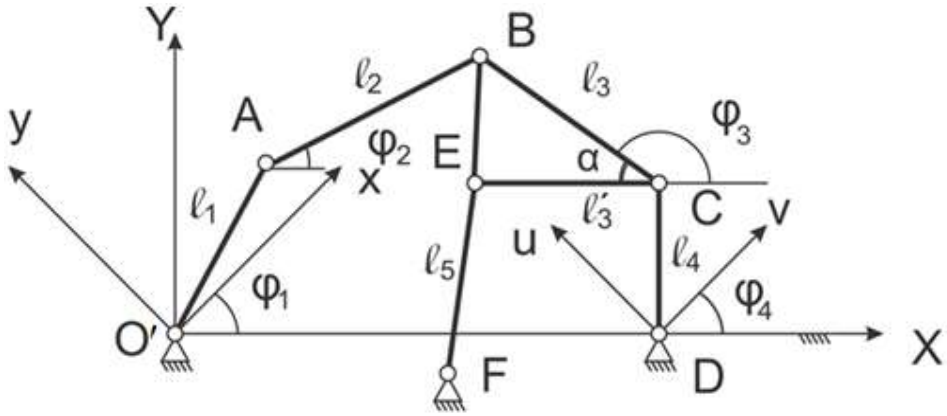

Рисунок 1.

Для того чтобы получить механизм, нужно на движение плоскостей наложить связи. Наложим связь в виде двух звеньев с вращательными кинематическими парами V класса [1].

Для решения данной задачи составим следующую систему уравнений замкнутости

$$\begin{cases} l_1\cos(\varphi_1+\varphi_{10})+l_2\cos\varphi_2=1+l_4\cos(\varphi_4+\varphi_{40})+l_3\cos\varphi_3 \\ l_1\sin(\varphi_1+\varphi_{10})+l_2\sin\varphi_2=l_4\,\mathrm{s}in(\varphi_4+\varphi_{40})+l_3\sin\varphi_3 \end{cases} \quad (1)$$

Длины звеньев l_1, l_2, l_3, l_4 задаем произвольно, задаем углы $\varphi_{10}=0, \varphi_{40}=0$. Из системы уравнений (1) найдем φ_2 и φ_3.

Полученная ИКЦ имеет лишнюю степень свободы, необходимо исключить ее путем наложения геометрических связей на относительные движения звеньев ИКЦ. Связь накладывается в виде звена EF. Точка E является круговой точкой [2]. Искомые параметры x_E, y_E, x_F, y_F, l_5.

Координаты точки E_i в неподвижной системе координат $XO'Y$

$$\begin{cases} x_{E_i}=1+l_4\cos(\varphi_4+\varphi_{40})+l_3^{'}\cos(\varphi 3+\alpha) \\ y_{E_i}=l_4\sin(\varphi_4+\varphi_{40})+l_3^{'}\sin(\varphi 3+\alpha) \end{cases} \quad (2)$$

Расстояние между точками E_i и F_i должно быть неизменным, поэтому для целевой функции запишем выражение взвешенной разности (отклонения) [3]

$$\Delta_i=\left[(x_{E_i}-x_{F_i})^2+(y_{E_i}-y_{F_i})^2-l_5^2\right] \quad (3)$$

После подстановки (2) в (3) получим

$$\begin{aligned} \Delta_i &= 1+2l_4\cos(\varphi_4+\varphi_{40})+2l_3^{'}\cos(\varphi_3+\alpha)-2x_F+2l_4\cos(\varphi_4+\varphi_{40})l_3^{'}\cos(\varphi_3+\alpha)- \\ & 2l_4x_F\cos(\varphi_4+\varphi_{40})+l_3^{'2}\cos^2(\varphi_3+\alpha)-2l_3^{'}x_F\cos(\varphi_3+\alpha)+x_F^2+l_4^2+ \\ & 2l_4\sin(\varphi_4+\varphi_{40})l_3\sin(\varphi_3+\alpha) \end{aligned} \quad (4)$$

Составляем сумму квадратов целевой функции $$S=\sum_{i=1}^{N}\Delta_i^2 \quad (5)$$

Необходимыми условиями минимума суммы являются равенства нулю частных производных по искомым параметрам

$$\frac{\partial S}{\partial P} = 0, \quad P = x_E, y_E, x_F, y_F, l_5 \tag{6}$$

Задача является нелинейной и может быть сведена к системе уравнений 9 степени. Сумму (5) можно представить в виде функции, зависящей от двух параметров, например x_E, y_E. В случае обращенного движения, полагая $\theta_i = \varphi_i - \psi_i$, $X_{O_i} = X_{O'_i} - X_{D_i}$ и $Y_{O_i} = Y_{O'_i} - Y_{D_i}$, получаем задачу об определении круговых точек. Три искомых параметра можно выразить через остальные

$$u_F = \frac{D_U}{D},\ v_F = \frac{D_V}{D},\ l_5 = \frac{D_H}{D}\ , \tag{7}$$

где введены следующие определители

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_4 & A_5 \\ A_3 & A_5 & N \end{vmatrix},\ D_U = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} B_1 & A_2 & A_3 \\ B_2 & A_4 & A_5 \\ B_3 & A_5 & N \end{vmatrix},$$

$$D_V = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & A_3 \\ A_2 & B_2 & A_5 \\ A_3 & B_3 & N \end{vmatrix},\ D_H = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & B_1 \\ A_2 & A_4 & B_2 \\ A_3 & A_5 & B_3 \end{vmatrix} \tag{8}$$

Целевую функцию S после некоторых преобразований можно представить в виде

$$S = \frac{W}{D} \tag{9}$$

Здесь W расширенный определитель следующего вида

$$W = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & B_1 \\ A_2 & A_4 & A_5 & B_2 \\ A_3 & A_5 & N & B_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{vmatrix} \tag{10}$$

В вышеприведенных формулах элементы определителей имеют вид

$$A_1 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2, A_2 = \sum_{i=1}^{N} X_i Y_i,\ A_3 = \sum_{i=1}^{N} X_i,\ A_4 = \sum_{i=1}^{N} Y_i^2,\ A_5 = \sum_{i=1}^{N} Y_i \tag{11}$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^{N} R_i^2 X_i,\ B_2 = \sum_{i=1}^{N} R_i^2 Y_i,\ B_3 = \sum_{i=1}^{N} R_i^2,\ B_4 = \sum_{i=1}^{N} R_i^4 \tag{12}$$

В формулах (11) и (12) для простоты введены обозначения

$$X_i = X_{O_i} + x_E \cos\theta_i - y_E \sin\theta_i$$
$$Y_i = Y_{O_i} + x_E \sin\theta_i + y_E \cos\theta_i \qquad (13)$$
$$R_i^2 = X_i^2 + Y_i^2$$

После подстановки (13) в (11) и (12) были получены для элементов определителя следующие выражения

$$\mathrm{A}_1 = \frac{1}{2}(C_1 + N)Z + 2C_2 x_E - C_5 x_E y_E - C_1 y_E^2 - 2C_3 y_E + C_4$$
$$A_2 = \frac{1}{2}C_5 Z + (C_3 + C_6)x_E + C_1 x_E y_E - C_5 y_E^2 + (C_2 - C_8)y_E + C_7 \qquad (14)$$
$$A_3 = C_9 x_E - C_{11} y_E + C_{10}, \quad A_5 = C_{11} x_E + C_9 y_E + C_{13}$$
$$\mathrm{A}_4 = \frac{1}{2}(-C_1 + N)Z + 2C_8 x_E + C_5 x_E y_E + C_1 y_E^2 + 2C_6 y_E + C_{12}$$
$$\mathrm{B}_1 = (C_9 x_E - C_{11} y_E + 2C_{16} + C_{10})Z + (2C_{17} + C_{22})x_E + 2(C_{15} - C_{14})x_E y_E -$$
$$- 2(C_{16} + C_{20})y_E^2 + (2C_{19} - C_{18})y_E + C_{21}$$
$$\mathrm{B}_2 = (C_{11} x_E + C_9 y_E + 2C_{14} + C_{13})Z + (2C_{24} + C_{18})x_E + 2(C_{20} + C_{16})x_E y_E +$$
$$+ 2(C_{15} - C_{14})y_E^2 + (2C_{23} + C_{22})y_E + C_{25}$$
$$\mathrm{B}_3 = NZ + 2C_{27} x_E + 2C_{28} y_E + C_{26}$$
$$\mathrm{B}_4 = NZ^2 + 2(2C_{27} x_E + 2C_{28} y_E + 2C_{33} + C_{26})Z + 4C_{32} x_E + 8C_{34} x_E y_E +$$
$$+ 4(C_{30} - C_{33})y_E^2 + 4C_{31} y_E + C_{29} \qquad (15)$$

В этих формулах $C_j,\ j = 1...34$ известные коэффициенты, представляющие собой всевозможные суммы. Вычисление этих сумм полностью автоматизировано.

В интегрированной среде Maple разработана программа аналитического получения системы двух окончательных уравнений 9 степени следующего вида

$$F_j(x_E, y_E) = A_1^{(j)} Z^4 + A_2^{(j)} Z^3 + A_4^{(j)} Z^2 + A_5^{(j)} Z + A_6^{(j)} = 0, \quad j = 1,2 \qquad (16)$$

здесь $Z = x_E^2 + y_E^2$, $A_k^{(j)}$ - полиномы k - го порядка относительно x_E и y_E.

Полиномы $A_k^{(j)}$ здесь не приводятся в силу их громоздкости.

Разработанный алгоритм позволяет применить эту методику для проектирования простых и сложных плоских рычажных механизмов.

В системе Maple были разработаны программы для рисования примитивов (звенья, стойки, ползуны, пружины и т.д.), с помощью которых можно изобразить любой механизм и построить анимационные объекты.

По полученным вычислениям был получен следующий механизм 3-го класса

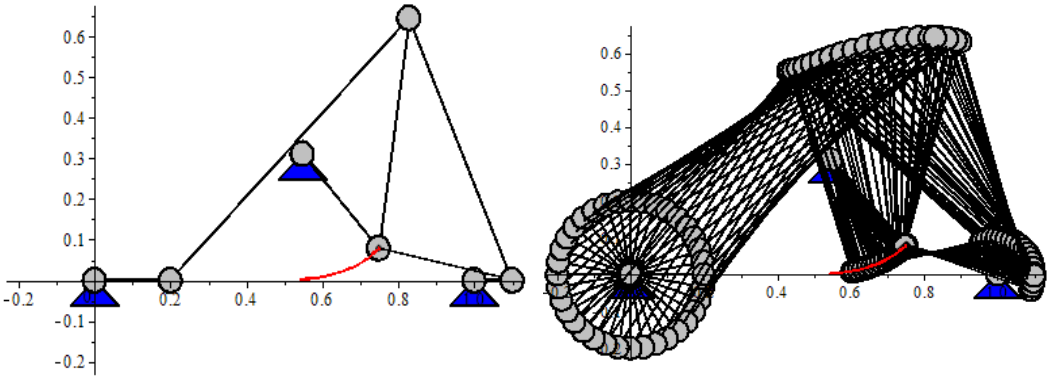

Рисунок 2.

Литература:

1. Саркисян Ю.Л. Аппроксимационный синтез механизмов. М.: Наука, 1982, 304с.

2. Косболов С.Б. Разработка методов кинематического анализа и синтеза плоских рычажных механизмов на основе исходных кинематических цепей, диссертация, 1987.
3. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. - М.: 1990. -592 с.