Д. В. Дудка, Ю.М. Дракунов
Сотр. КазГУ им.аль-Фараби, д.т.н. проф. КазГУ
D. V. Dudka, Yu. M. Drakunov
Employee KazSU, d.t.s., prof., KazSU

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПЕРЕДАТОЧНОГО МЕХАНИЗМА ПО ДЕВЯТИ ПАРАМЕТРАМ

В данной работе рассмотрен метод проведения кинематического синтеза пространственного передаточного механизма по девяти параметрам, который основан на вычислении искомых параметров синтеза, путем составления обобщенного полинома и сведение его к девяти нелинейным уравнениям.

Ключевые слова: кинематический синтез, параметр, нелинейные уравнение.

KINEMATIC SYNTHESIS OF THE SPATIAL TRANSMISSION GEAR IN NINE PARAMETERS

In this work the method of carrying out kinematic synthesis of the spatial transmission gear in nine parameters which is based on calculation of required parameters of synthesis, by drawing up the generalized polynomial and its data to nine nonlinear equations is considered.

Keywords: kinematic synthesis, parameter, linear equation.

В задаче идёт поиск полной сборки механизма удовлетворяющей заданному условию зависимости углов поворота. Рассмотрим задачу синтеза пространственного четырехзвенника с двумя вращательными и двумя сферическими.

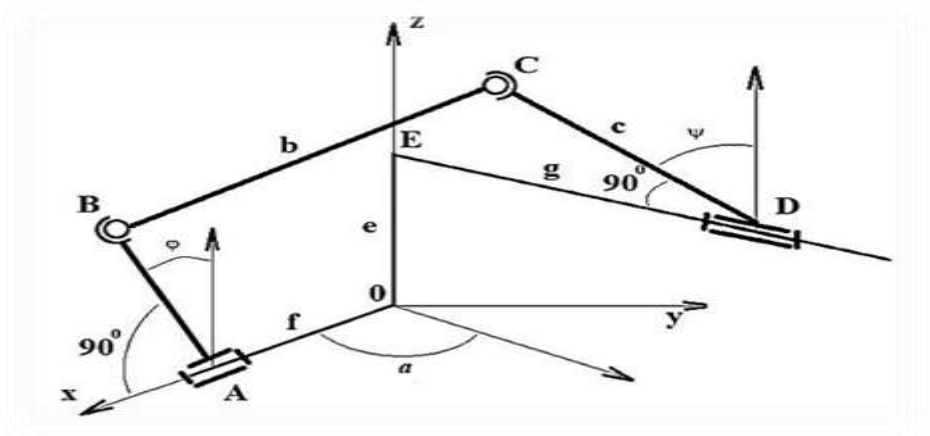

Рис. 1. Схема пространственного передаточного четырехзвенника

Выберем систему отсчета механизма, принимая за начало координат точку O и направив ось OX по OA, а ось OZ – по линии общего перпендикуляра OE неподвижных осей вращения (Рисунок 1).

Требуется по заданной функции $\psi = \sin(\varphi)\psi(\varphi)$, где φ и ψ - углы поворота звеньев AB и CD, найти относительные длины звеньев, размеры, определяющие расположения осей вращения звеньев, начальные углы поворота, итого девять параметров: $a, b, c, f, e, g, \alpha, \varphi 0, \psi 0$.

Координаты точек B и C относительно неподвижной системы координат $OXYZ$ можно записать в виде следующих выражений, используя известные формулы преобразования при повороте и переносе подвижных координатных систем:

$$\begin{cases} x_B = f; \\ y_B = -a\sin(\varphi+\varphi 0); \\ z_B = a\cos(\varphi+\varphi 0). \end{cases} \qquad \begin{cases} x_C = g\cos(\alpha)+c\cos(\alpha)\sin(\psi+\psi 0); \\ y_B = g\sin(\alpha)-c\cos(\alpha)\sin(\psi+\psi 0); \\ z_C = e+c\cos(\psi+\psi 0). \end{cases} \tag{1}$$

В качестве функции характеризующей отклонение воспроизводимой механизмом функции от заданной, примем выражение взвешенной разности:

$$\Delta = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 - b^2, \tag{2}$$

Подставим (1) в выражение (2) и после некоторых преобразований получим обобщенный полином:

$$\Delta = f_0 + f_1P_1 + f_2P_2 + f_3P_3 + f_4P_4 + f_5P_5 + f_6P_6 + f_7P_7 + P_8 \tag{3}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} &f_0 = \cos(\psi)\cos(\varphi);\ f_1 = \cos(\psi);\ f_2 = \sin(\psi);\ f_3 = \cos(\varphi) \\ &f_4 = \sin(\varphi);\ f_5 = \sin(\varphi)\cos(\psi);\ f_6 = \sin(\psi)\cos(\varphi);\ f_7 = \sin(\varphi)\sin(\psi) \end{aligned} \tag{4}$$

Коэффициенты при f_i представляют собой:

$$\begin{aligned} P_4 &= \frac{g\cos(\varphi 0)\sin(\alpha)+e\sin(\varphi 0)}{c(\cos(\alpha)\sin(\psi 0)\sin(\varphi 0)+\cos(\psi 0)\cos(\varphi 0))} \\ P_5 &= -\frac{-\cos(\alpha)\cos(\varphi 0)\sin(\psi 0)+\cos(\psi 0)\sin(\varphi 0)}{\cos(\alpha)\sin(\psi 0)\sin(\varphi 0)+\cos(\psi 0)\cos(\varphi 0)} \\ P_6 &= \frac{-\cos(\varphi 0)\sin(\psi 0)+\cos(\alpha)\cos(\psi 0)\sin(\varphi 0)}{\cos(\alpha)\sin(\psi 0)\sin(\varphi 0)+\cos(\psi 0)\cos(\varphi 0)} \\ P_7 &= -\frac{\sin(\psi 0)\sin(\varphi 0)+\cos(\alpha)\cos(\psi 0)\cos(\varphi 0)}{\cos(\alpha)\sin(\psi 0)\sin(\varphi 0)+\cos(\psi 0)\cos(\varphi 0)} \\ P_8 &= -\frac{1}{2}\frac{-g^2-c^2+b^2-e^2-a^2-f^2+2fg\cos(\alpha)}{ac(\cos(\alpha)\sin(\psi 0)\sin(\varphi 0)+\cos(\psi 0)\cos(\varphi 0))} \end{aligned} \tag{5}$$

Из этих выражений можно получить аналитическое решение искомых параметров:

$$a = a(P_i), b = b(P_i), c = c(P_i),\ f = f(P_i), e = e(P_i), g = g(P_i), \alpha = \alpha(P_i),$$
$$\varphi 0 = \varphi 0(P_i), \psi 0 = \psi 0(P_i)$$

Если количество положений точек - N, которыми функция $\psi = F(\varphi)$ задается в интервале $0 \le \varphi \le \varphi_m$, не более восьми, т.е. числа искомых параметров, то при синтезе механизма можно достичь совпадения функции, воспроизводимой механизмом, с функцией $F(\varphi)$ во всех заданных точках φ_i $(i = 1,\ldots,N)$. При $N = 8$ выражение (3) приводит к системе восьми линейных неоднородных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{8} f_{ji} P_j = f_{0i} \ (i = 1, 2, \ldots, 8) \tag{6}$$

Если функция $f(\varphi)$ задается $N > 8$ точками, то искомые параметры механизма могут лишь приближенно удовлетворить возникающем в данном случае N линейным уравнениям типа (6). Поэтому задача синтеза состоит в минимизации неувязок Δ_i этих уравнений. Наиболее просто можно решить эту задачу методом квадратического приближения, согласно которому искомые параметры находят из необходимых условий минимума суммы квадратов S минимизируемых величин $\Delta_i (i = 1 \ldots N)$:

$$\frac{\partial S}{\partial P_k} = 0, (k = 1 \ldots 8) \tag{7}$$

Эти условия с учетом (6) приводят к следующей линейной системе:

$$\sum_{k=1}^{8} c_{kj} P_k = \gamma_j, (k = 1 \ldots 8)$$

где

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{N} f_{ki} \cdot f_{ji} \tag{9}$$

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{N} f_{ji} f_{0i}, (k = 1 \ldots 8) \tag{10}$$

После решения этой системы, искомые параметры механизма вычисляют также, как и в случае $N = 8$.

Рассмотренный метод проведения кинематического синтеза пространственного передаточного механизма по девяти параметрам синтеза, основаный на вычислении искомых параметров синтеза, путем составления обобщенного полинома и сведение его к восьми нелинейным уравнениям полностью автоматизирован в системе Maple. Для получения решения достаточно записать уравнения движения точек B и C в проекциях на координатные оси (1). Далее система Maple сама подставит их в уравнение взвешенной разности (2). После этого используя функцию упрощения *simplify()* и оператор *collect(Δ,trig)* – который записывает выражение взвешенной разности, комбинируя его по тригонометрическим функциям (*trig*), приводит его к общему виду.

Используя функцию *subs()* – которая производит замену в уравнении (2) по выражениям (4), и *algsubs()* – являющуюся функцией замены для выражений (5), система Maple приводит уравнение (2) к виду (3).

Из введенных условий замены P_i (5) аналитически высчитываются искомые параметры синтеза $a, b, c, f, e, g, \alpha, \varphi 0, \psi 0$. Для этого выражение (5) решается функцией *solve()*.

Прежде чем использовать метод квадратического приближения, программа находит значения $f_{0i}, f_{1i}, f_{2i}, f_{3i}, f_{4i}, f_{5i}, f_{6i}, f_{7i}$. Для этого был создан цикл ***for do … od:***. Количество каждого из f равняется количеству N положений механизма. Количество положений механизма для данной задачи было выбрано равным 20. Функция *convert(degrees,radians)* – позволяет перевести заданные максимальные углы поворота ($\varphi_{\max} = 90^0, \psi_{\max} = 90^0$) из градусов в радианы. Далее идет расчет шага, с которым будет изменяться угол поворота φ:

$$\varphi_h = \frac{\varphi_{\max}}{N}, \qquad (11)$$

где $\varphi_{\max}$ - максимальное значение угла поворота φ,

N – Количество положений механизма.

Функция зависимости углов поворота была взята синусоидальной, а именно:

$$\psi = \sin(\varphi).$$

Для решения системы (8), в программе был создан цикл ***for do … od:***, в котором, используя значения шага по углу поворота φ и для уравнения (9) и (10) были созданы 2 матрицы 8×8 и матрица столбец 8×1.

Решая получившуюся систему средствами Maple, программа получает решение в виде вектора и при помощи функцию *convert()* – преобразовывает его в список. Тем самым получаем значения параметров P_j, необходимых для преобразования аналитического решения в численное:

$$P_1 = 3.95; P_2 = 3.44; P_3 = -4.50; P_4 = -5.57; P_5 = -6.88; P_6 = 4.48; P_7 = 0.58; P_8 = 1.54$$

Автоматически подставив получившиеся значения P_j в формулы (5), система Maple получает значения искомых восьми параметров синтеза:

$$\rho = \pi - 2.21; \varphi 0 = -1.26; \psi 0 = 0.27; g = 0.19; a = 1; c = 0.43; e = 0.4; b = 1.4;$$
$$f = -0.76$$

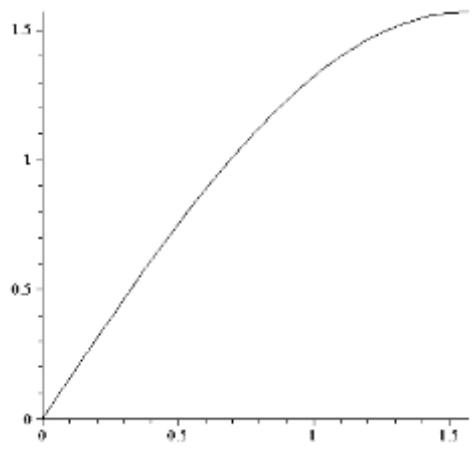

Рис. 2. График функции $\psi = \psi(\varphi)$

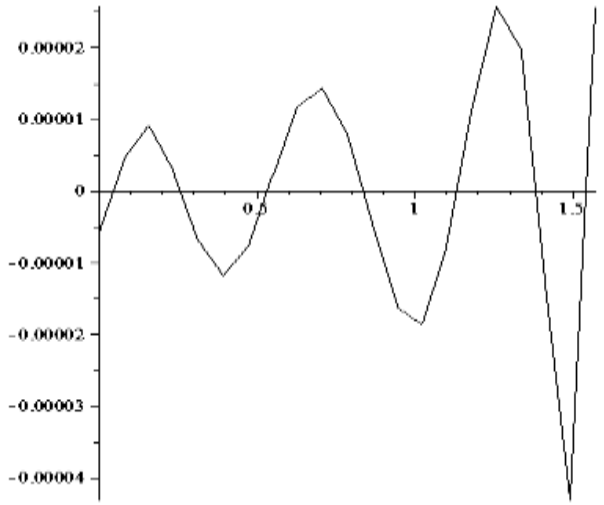

Рис. 3. График отклонения Δ_i

Для проверки правильности решения система Maple автоматически строит графики отклонений взвешенной разности и анимационную картину механизма. Слева на Рисунке 2 приведен график исходной функции $\psi = F(\varphi) = \sin(\varphi)\psi(\varphi)$, а справа на Рисунке 3 приведен график отклонения Δ_i в зависимости от положений угла поворота φ.

На Рисунках 4 и 5 изображены картины пространственного передаточного механизма, полученного по семи параметрам синтеза и картина механизма по его восьми положениям.

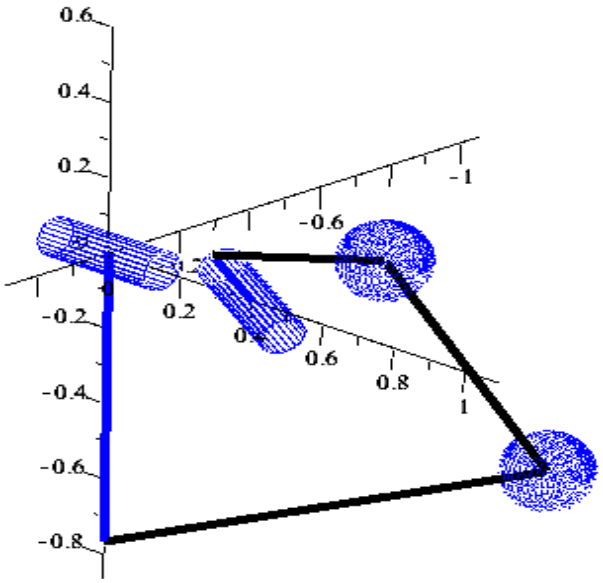

Рис. 4 .Картина пространственного механизма

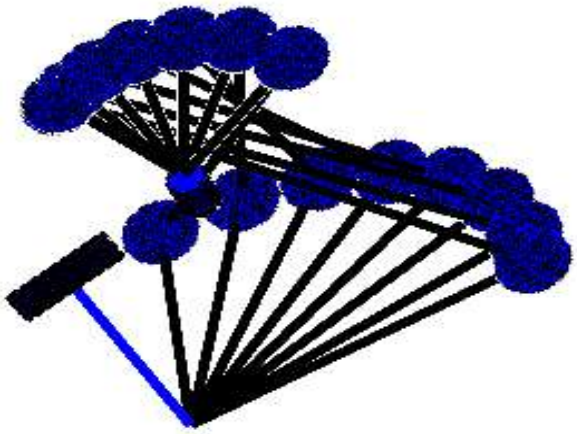

Рис. 5. Картина механизма по его восьми положениям

Литература:

1. Механика машин. Учебное пособие для вузов / Под редакцией проф. Г.А. Смирнова; Авторы: И.И. Вульфсон, М.З. Коловский, Э.Е. Пейсах и др. - Москва, издательство "Высшая школа", 1996, 511 с.
2. Джолдасбеков У. А., Молдабеков М. М. Аналитические методы анализа и синтеза механизмов высоких классов. – Алматы, 1997г.