УДК 517.3.

Г.С. Курманалиева – преп. ОшТУ
G. S. Kurmanaliyeva – teacher OshTU

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ ТРАПЕЦИЙ И ПАРАБОЛ

В статье рассмотрено два метода приближенного вычисления определенного интеграла – метод трапеций и метод Симпсона.

Ключевые слова: определенный интеграл, метод трапеции, метод парабол.

CALCULATION OF CERTAIN INTEGRALS METHOD OF TRAPEZES AND PARABOLAS

In article two methods of approximate calculation of a certain integral – a method of trapezes and Simpson's method are considered.

Keywords: definite integral, trapezoidal method, parabolas method.

Задача вычисления определенного интеграла далеко не всегда может быть решена сведением к первообразной, поэтому разработаны численные методы, которые позволяют найти значение интеграла с достаточно высокой точностью. Суть этих методов - в замене альтернативный выбор: осуществить замену подынтегральной функции одним интерполяционным многочленом высокой степени, описывающим изменение функции $f(x)$ на всем промежутке $[a,b]$, или семейством интерполяционных многочленов не высокой степени, представляющих функцию $f(x)$ на локальном промежутке $[x_i,x_{i+1}]$ (i=0, 1, …, n). В последнем случае искомый интеграл получают в виде суммы интегралов

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx,$$

каждый из которых вычисляется путем замены $f(x)$ интерполяционным многочленом невысокой степени.

Первая постановка не получила заметного распространения в силу ее громоздкости и малой эффективности, что обусловлено значительным влиянием ошибок вычисления. Вторая постановка оказалась наиболее рациональной, так как позволила создать алгоритмические структуры с высокой степенью защиты от ошибок вычислений.

Рассмотрим две модели приближенного интегрирования: с помощью интерполяционных многочленов первой и второй степени. Первая модель именуется *методом трапеций,* вторая – *методом парабол* (*Симпсона*).

Метод трапеций

Разобьем промежуток $[a,b]$ на n равных частей: $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, …, $[x_{n-1},x_n]$, где $x_i=x_0+ih$ ($i=1, 2,\ldots, n$). Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \qquad (1)$$

В каждом промежутке $[x_i,x_{i+1}]$ заменим $f(x)$ на $P_{1,i}$:

$$P_{1,i} = f(x_i) + \frac{\Delta f_i}{h}(x - x_i)$$

и

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{1,i}\,(x)dx = y_i h + \frac{\Delta y_i}{h}\frac{1}{2}(x - x_i)^2 \Big|_{x_1}^{x_{i+1}} = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} h.$$

Тогда

$$\int_a^b f\,(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1}\frac{y_i + y_{i+1}}{2} = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right), h = \frac{b-a}{n}. \qquad (2)$$

Метод парабол

По аналогии построим аппроксимацию интеграла методом парабол, предварительно разбив промежуток $[a,b]$ на n равных частей ($n=2m$). Тогда получим m промежутков $[x_0,x_2]$, $[x_2,x_4]$, …, $[x_{2m-2},x_{2m}]$, каждый из которых содержит три узловые точки. Так, промежуток $[x_{2i},x_{2i+2}]$, где $i=0,1,\ldots,m-1$, содержит точки x_{2i}, x_{2i+1}, x_{2i+2}.

Особенности аппроксимационных представлений по методу трапеций и парабол приведены на рис. 1.

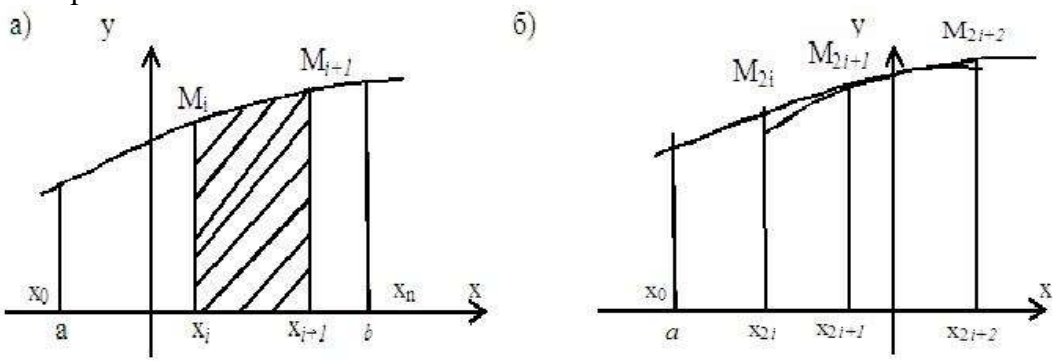

Рис. 1.

В методе трапеций (рис. 1, *а*) на каждом элементарном промежутке значение интеграла заменяется площадью трапеции, а в методе парабол (рис.1, б) площадью криволинейной трапеции с дугой в форме параболы.

В последнем случае

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} P_{2,i}dx,$$

где

$$P_{2,i} = y_{2i} + \frac{\Delta y_{2i}}{1!\,h}(x - x_{2i}) + \frac{\Delta^2 y_{2i}}{2!\,h^2}(x - x_{2i})(x - x_{2i+1}).$$

Величины интегралов от $P_{2,i}$

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} P_{2,i}dx = y_{2i}\cdot 2h + \frac{\Delta y_{2i}}{h}\frac{1}{2}(x - x_{2i})^2 \Big|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 y_{2i}}{h^2}\int\limits_{x_{2i}}^{x_{2i+2}}(x-x_{2i})(x-x_{2i}-h)dx=$$

$$=y_{2i}\cdot 2h+\Delta y_{2i}\cdot 2h+\frac{1}{3}\Delta^2 y_{2i}h=h\left[2y_{2i+1}+\frac{1}{3}(y_{2i+2}-2y_{2i+1}+y_{2i})\right]=$$

$$=\frac{h}{3}(y_{2i+2}+4y_{2i+1}+y_{2i}).$$

Отсюда вытекает, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx\cong\frac{h}{3}\left(y_0+y_{2m}+2\sum_{i=1}^{m-1}y_{2i}+4\sum_{i=0}^{m-1}y_{2i+1}\right),\qquad(3)$$

где $h=\frac{b-a}{2m}$.

Эта формула называется *формулой парабол* или *формулой Симпсона.*

Погрешность методов трапеций и парабол

Оценим погрешность полученных выражений. Величину погрешности можно представить в формульном виде, если предположить, что функция $f(x)$ имеет производные второго или четвертого порядка в промежутке $[a,b]$. Запишем эти выражения, опуская промежуточные выкладки:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)-\frac{n}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 f''(\theta),\theta\epsilon(a,b);\quad(4)$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6m}\left(y_0+y_{2m}+2\sum_{i=1}^{m-1}y_{2i}+4\sum_{i=0}^{m-1}y_{2i+1}\right)-$$

$$-\frac{n}{90}\left(\frac{b-a}{2m}\right)^5 f^{IV}(),\qquad\epsilon(a,b).\qquad(5)$$

Нетрудно видеть, что остаточный член формулы парабол (см. формулу (5)) при возрастании m убывает с большей скоростью, чем остаточный член формулы трапеций (см. формулу (4)), если соответствующие производные функции $f(x)$ являются ограниченными.

○ Действительно, если принять $f(x)=e^{-2x}$ и $[a,b]=[0;\ 1{,}2]$, то

$$I=\int\limits_0^{1,2}e^{-2x}dx=\frac{1}{2}(1-e^{-2,4})=0{,}454601.$$

Положим n=6 и $h=\frac{b-a}{n}=0.2$.

Приведем таблицу узловых значений функции e^{-2x} (табл. 1).

Таблица 1

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20
y_i	1.000	0.6703	0.4493	0.3012	0.2019	0.1353	0.0907

Значение интеграла по формулам трапеций I_{TP} и парабол $I_{ПАР}$ таково:

I_{TP}=0, 460687, $I_{ПАР}$=0, 454704.

Следовательно, реальные ошибки составляют:

$I- I_{TP}=0,006086;$ $I- I_{ПАР}=-0,000103.$

С другой стороны, оценочные величины ошибок, вычисленные по формулам (4) и (5), имеют вид:

$$\left|\frac{6}{12}0,2^3 f''(\theta)\right| \le 0.004 \max_{[0;1,2]}|f''(x)| \approx 0.016$$

и

$$\left|\frac{6}{90}0,2^5 f^{IV}()\right| \le \frac{0.00032}{15}\max_{[0;1,2]}|f^{IV}(x)| \approx 0.00032.$$

Вышеприведенный анализ позволяет сделать вывод, что оценочные погрешности примерно в 3 раза превосходят реальные погрешности, что вполне удовлетворительно с точки зрения практики. Отметим также, что погрешность интегрирования по формуле парабол на два порядка, т. е. почти в 100 раз, меньше, чем по формуле трапеций.

Литература:

1. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. – М.: Наука, 1964.
2. Ермаков В.И. и др. Справочник по математике для экономистов. – М.: Высшая школа., 1997.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. –М.: Наука, 1972.
4. Кудрявцев В.П., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. –М.: Наука, 1975.
5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1964.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: В2 т. –М.: Наука, 1964.
7. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: В 2 т. – М.: Наука, 1968.