УДК 517. 2

А.М. Аракеева, А.Б. Мурзабаева
Преп.ОшТУ,преп.ОшТУ
A.M. Arakeeva, A.B. Murzabaeva
Teacher OshTU, teacher OshTU

ИССЛЕДОВАНИЕ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТРОГО (НЕ СТРОГО) РАЗМЕЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ ПРИ РЕШЕНИИ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой статье рассматривается исследования достаточных условий существования строго (нестрого) размеченных множеств при решении сингулярно - возмущенных уравнений. Сформулированы некоторые достаточные условия существования строго размеченных множеств типа $H^1(u,\{p(t_0,t)\},U)$. *Основное внимание уделено действительной частью функции, а также возрастания и убывания функции на отрезке.*

Ключевые слова: сингулярно-возмущенные уравнение, функции, значение, убывание функции.

STUDY OF SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF STRICT (NOT STRICTLY) MARKUP SETS FOR SOLVING SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS

This article focuses on the study of sufficient conditions for the existence of strongly (weakly) markup sets for solving singularly - perturbed equations. We formulate some sufficient conditions of existence of marked strictly set type. The focus is on the real part of the function as well as increasing and decreasing function on the interval.

Key words: singularly perturbed equations, function, value, decrease function.

Сформулируем некоторые достаточные условия существования строго размеченных множеств типа $H^1\ (u,\{p(t_0,t)\},U)$. Рассмотренные в [1] указывают, что одним из способов размечения данного множества (строгого или нестрогого) является определение множества $\{p\ \ (t_0,t)\}$ по производным функции $u(t_1,t_2)$ (по тем или иным направлениям).

Потребуем выполнения следующих условий:

U_1. Пусть $\lambda(t)\in Q(H_0)$, где

$$H_0=\{(t_1,t_2): t_0\le t_1\le T, -D\le t_2\le D\}.$$

$$u(t_1,t_2)=\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\,.$$

U_2. $\operatorname{Re}\lambda(t_1+i0)<0$ при $t_0\le t_1<T_0$; $\operatorname{Re}\lambda(T_0+i0)=0$; $\operatorname{Re}\lambda(t_1+i0)>0$ при $T_0<t_1\le T$.

$\forall t\in H_0: Jm\lambda(t)\ne 0$ (для определенности возьмем $Jm\lambda(t)>0$.

U_3. Пусть $u(\overline{t_0},0)=u(\overline{T_0},0)=C_1$, $t_0<\overline{t_0}<T_0<\overline{T_0}<T_0$ и линия уровня $\{C_1\}$ соединяет точки к $(\overline{t_0},0),(\overline{T_0},0)$. Возьмем кривую $\{C_1^*\}$симметричную к $\{C_1\}$. Область ограниченный $\{C_1\}$ и $\{C_1^*\}$ обозначим $H\subset H_0$.

Лемма 1 : При выполнении условий U_1-U_3 существуют множества $\{C\}$, линии уровня $u(t_1,t_2)=C$, соединяющие точки интервалов $[\bar{t}_0,T_0)$, $(T_0,\overline{T_0}]$, $C_0<C\le C_1$, $u(\overline{T_0},0)=C_0$.

Доказательство: Согласно условие $Jm\lambda(t)>0$ область $H\in H_0$ полностью покрывается отрезками прямой $t_1=const$, $\overline{t_0}\le t_1\le\overline{T_0}$, исходящих из $\{C_1\}$.

Выполняются все условия леммы 1, тогда существуют множества $\{C\}$, соединяющие точки интервалов $[\bar{t}_0,T_0)$, $(T_0,\overline{T_0}]$. Если учесть, что $u(t_1,0)$ имеет минимум при $t_1=T_0$, то $u(T_0;0)=C_0<C\le C_1$. Лемма доказана.

Примечание 1: Если: 1. Выполняются U_1,U_2.

2. $u(\overline{t_0},0)=u(\overline{T_0},0)=C_1$ и $u(t_1,-D)>C_1$ при $t_0\le t_1\le T_0$.

Тогда существует линия уровня $\{C_1\}$, соединяющего точки $(\overline{t_0},0),(\overline{T_0},0)$.

Лемма 2: Пусть выполнены условия U_1,U_2,U_3. Тогда существует $H^0\ (u,\{p(t_0,t)\},U)$. Доказательство: $\forall t\in H:\{p(t_0,t)\}$ состоит из части $(\{C_1\})$ $\left[(\overline{t_0};0),(t_{_1};\tilde{t}_2)\right]$ (на этой части $u(t_1,t_2)\equiv C_1$); отрезка $\left[(t_1;\tilde{t}_2),(t_{1_1};t_2)\right]$ (в силу $\forall t\in H_0:Jm\lambda(t)>0$ на этом отрезке $u(t_1,t_2)$ убывает по t_2). Тогда $H^0\ (u,\{p(t_0,t)\},U)$. Лемма доказана.

Пусть $\{C_1\}$ соединяет точки $(\tilde{t}_0;0)$, $(\tilde{T}_0;0)$, а $\{C_2\}$ точки $(t_{10};0)$, $(T_{10};0)$ $\left(\tilde{t}_0<t_{10}<T_0,T_0<T_{10}<\tilde{T}_0\right)$. Рассмотрим область H.

Через точку $(T_{10};0)$ проведем прямую параллельную оси t_2. Эта прямая с линией уровня C_1 имеет единственную точку пересечения $(T_{10};t_{21})$ (условие $Jm\lambda_1(t)>0$).

Введем в рассмотрение полосу, Π ограниченную линиями уровней $\{C_1\}$ и $\{C_2\}$, отрезком действительной оси $[\tilde{t}_0,t_{10}]$ и отрезком соединяющим точки $(T_{10};0),(T_{10};t_{21})$.

На полосе Π рассмотрим уравнение

$$u(t_1,t_2)=at_1+b \qquad (1)$$

где $$a=\frac{C_2-C_1}{T_{10}-\overline{t_0}},\qquad b=\frac{C_1T_{10}-C_2\overline{t_0}}{T_{10}-\overline{t_0}}$$

Лемма 3: Пусть выполнено U_1,U_2,U_3.

Тогда: 1. В полосе Π существует множество точек $\{(t_1;t_2)\}$, где справедливо (1).

2. Уравнение (1.) в $\{(t_1;t_2)\}$ определяет однозначную непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi_{_0}(t_1)$ с областью существования $\bar{t}_0\le t_1\le T_{10}$ и кривая (K_0), определяемая этой функцией, соединяет точки $(\tilde{t}_0;0),(T_{10};0)$.

3. $u(t_1,\varphi_0(t_1))$ убывает при $\bar{t}_0\le t_1\le T_{10}$.

Доказательство: Сначала докажем, что $\forall t_1\in(\overline{t_0},T_{10}): at_1+b>u(t_1,0)$. По определению $a\overline{t_0}+b=u(\overline{t_0},0)=C_1$, $aT_{10}+b=u(T_{10},0)=C_2$.

По условию, $\bar{t}_0<t_1<T_{10}$ и $a<0$. Тогда $C_2<at_1+b<C_1$. Функция at_1+b однозначна и убывает. Следовательно, произвольному $t_1\in[\overline{t_0},T_{10}]$ соответствует единственное $C\in(C_2,C_1)$ и $at_1+b=C$.

Возьмем точку $(t_{10};0)$. Для этой точки $u(t_{10};0)=C_2$.

at_1+b значение C_2 принимает при $t_1=T_{10}$. Тогда $C_1>at_{10}+b>C_2$. Пусть $at_{10}+b=C_{01}$, причем $C_2<C_{01}<C_1$.

Рассмотрим отрезок $[(t_{10};0),(t_{10};\tilde{t}_2),\ u(t_{10};\tilde{t}_2)=C_1]$. Функция $u(t_{10},t_2)$ убывает на данном отрезке и $u(t_{10},0)=C_2<C_1=u(t_{10},\tilde{t}_2)$. Отсюда следует, что на рассматриваемом отрезке существует единственная точка $(t_{10};t_{20})$ и $u(t_{10};t_{20})=C_{01}$ т.е. $u(t_{10};t_{20})=at_{10}+b$.

Из неравенства $C_2<C_{01}<C_1$ и условий $u(\overline{t_0},0)=C_1$, $u(t_{10},0)=C_2$, $\dfrac{\partial u}{\partial t_1}(t_1;0)<0$ $(\overline{t_0}\le t_1\le t_{10})$ вытекает, что существует точка $(t_{02};0)$, $(\overline{t_0}<t_{02}<t_{10})$ и $u(t_{02},0)=C_{01}$.

Так как $at_{10}+b=C_{01}$, $t_{02}<t_{10}$, то $at_{02}+b=C_{02}>C_{01}$. Возьмем отрезок , $[(t_{02};0),(t_{02};\tilde{t}_2),\ u(t_{02};\tilde{t}_2)=C_1]$ и рассмотрим функцию $u(t_{02},t_2)$. Из условий $u(t_{02};\tilde{t}_2)=C_1$, $u(t_{02},0)=C_{01}$, $C_1>C_{02}>C_{01}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t_2}<0$ вытекает существование единственной точки (t_{02},t_{21}) для которой $u(t_{02},t_{21})=C_{02}$. Как и в предыдущем случае, существует точка $(t_{03},0)$ и $u(t_{03},0)=C_{02}$, $\overline{t_0}<t_{03}<t_{02}$. Продолжая этот процесс, получим множество точек $\{t_{10},t_{02},\ldots,t_{0j},\ldots\}$ из интервала $(\overline{t_0},t_{10}]$ для которых $u(t_{0j},0)<at_{0j}+b$. Пусть t_1 произвольная точка из $(\overline{t_0},t_{10}]$ и $t_1\ne t_{0j},t_1\ne t_{10}$. Тогда $t_1\in(t_{0j+1},t_{0j})$. По доказанному $u(t_{0j+1},0)=C_{0j}$, $u(t_{0j},0)=C_{0j-1}$ и $C_{0j}>C_{0j-1}$;
$at_{0j+1}+b=C_{0j+1}$, $at_{0j}+b=C_{0j}$, $C_{0j+1}>C_{0j}$.

По условию $t_{0j+1}<t_1<t_{0j}$. Отсюда учитывая условие, $\dfrac{\partial u}{\partial t_1}<0$ получим $C_{0j}>u(t_1,0)>C_{0j-1}$. Функция at_1+b также убывает на интервале (t_{0j+1},t_{0j}), следовательно $C_{0j+1}>at_1+b>C_{0j}$. Сравнивая полученные неравенства, имеем $at_1+b>u(t_1,0)$. Подведя итог можем сказать, что доказано $\forall t_1\in(\overline{t_0},t_{10}]: at_1+b>u(t_1,0)$.

Теперь рассмотрим интервал $[t_{10},T_{10})$. По условию $u(t_{10},0)=u(T_{10},0)=C_2$. Для $t_{10}\le t_1<T_{10}$ имеем $C_{01}>at_1+b>C_2$. Согласно условию , U_2 получим $\forall t_1\in(t_{10},T_{10}]: u(t_1,0)\le C_2$, причем равенство имеет место только при $t_1=t_{10}$. Из полученных неравенств следует следующее: $\forall t_1\in(t_{10},T_{10}]: at_1+b>u(t_1,0)$.

Таким образом, $\forall t_1\in(\overline{t_0},T_{10}]: at_1+b>u(t_1,0)$.

Возьмем произвольное $t_1\in(\overline{t_0},t_{10})$. По доказанному $C=\ at_1+b_1>u(t_1,0)$, $C_2<C<C_1$. Рассмотрим отрезок $[(t_1;0),(t_1;\tilde{t}_2),\ u(t_1;\tilde{t}_2)=C_1]$. На концах этого отрезка $u(t_1,0)=\tilde{C}, u(t_1,\tilde{t}_2)=C_1$, $C_1>\tilde{C}$. С другой стороны $C_1>C>\tilde{C}\ge C_2$. Если учесть, что функция $u(t_1,t_2)$ убывает по t_2 при фиксированном t_1, то на рассматриваемом отрезке существует единственная точка (t_1,t_2) и $u(t_1,t_2)=C=at_1+b$. Точка $(t_1,t_2)\in\Pi$ (для рассматриваемого случая).

Пусть произвольная $t_1\in[\overline{t_0},T_{10})$. Также, рассмотрим отрезок $[(t_1;0),(t_1;\tilde{t}_2),u(t_1;\tilde{t}_2)=C_1]$. По условию U_2, $u(t_1,0)=C_2\ge u(t_1,0)$. Было доказано, что $\forall t_1\in[t_{10},T_{10}]: C_{01}\ge at_1+b>C_2$. Значит $C_1>C_{01}\ge at_1+b>C_2\ge u(t_1,0)$. На рассматриваемом отрезке функция $u(t_1,t_2)$ убывает (согласно условию $\dfrac{\partial u}{\partial t_2}<0$). Тогда поскольку $u(t_1,\tilde{t}_2)=C_1$, $u(t_1,0)=\tilde{C}$, $at_1+b=C$, $C_1>C_{01}\ge C>C_2\ge\tilde{C}$. Отсюда вытекает, что на данном отрезке существует единственная точка (t_1,t_2) и $u(t_1,t_2)=C=at_1+b$, причем $(t_1,t_2)\in\Pi$. Доказано, что существует множество точек $\{(t_1,t_2)\}\subset\Pi$ и на этом множестве $u(t_1,t_2)=at_1+b$. Это множество содержит точки $(\overline{t_0};0),(T_{10};0)$. Первая часть леммы доказана. Из первой части вытекает существование некоторой функции $t_2=\varphi_0(t_1)$ на множестве $\{(t_1;t_2)\}$ $(\overline{t_0}\le t_1\le T_{10})$. Но эта часть не определяет основные свойства функции $\varphi_0(t_1)$ таких как непрерывность, дифференцируемость.

На множестве $\{(t_1,t_2)\}\subset\Pi$ рассмотрим (1). Выполняются все условия теоремы существования и единственности неявной функции [2]. Тогда из (1) определяется единственная, однозначная, непрерывно дифференцируемая функция $t_2=\varphi_0(t_1)$ с областью существование $\overline{t_0}\le t_1\le T_{10}$. Кривую определяемую этой функцией обозначим (K_0). По определению (K_0)

соединяет точки $(\overline{t_0};0),(T_{10};0)$. (K_0) есть множество $\{(t_1,t_2)\}\subset\Pi$. На кривой (K_0) уравнение (1) превращается в тождество. Дифференцируя это тождество, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\cdot\varphi_0'(t_1)=a<0. \qquad (2)$$

(2) указывает, что по кривой (K_0) функция $u(t_1,t_2)$будет указывающей.

Лемма доказана полностью.

Условие U_2 заменим на следующее

U_{20}. $\operatorname{Re}\lambda(t_1+i0)<0$, $\operatorname{Re}\lambda(T_0+i0)=0$; $\operatorname{Re}\lambda(t_1+i0)>0$

$\forall t_1\in(t_0,T\ ]:\operatorname{Re}\lambda'(t_1+i0)>0$;

$\forall t\in H_0:\operatorname{Im}\lambda(t)\ne 0$ (Для определенности возьмем $\operatorname{Im}\lambda(t)>0$).

Справедлива

Лемма 3.1**:** Пусть выполнены U_1,U_{20},U_3.

Тогда справедливы утверждения 1-3 леммы 4.

Доказательство: Из доказательство леммы 4 ясно, что основным моментом является выполнения неравенства

$$\forall t_1\in(\overline{t_0},T_{10}):at_1+b>u(t_1,0).$$

Докажем это неравенство.

Условия U_1,U_{20},U_3 обеспечивают существование Π.

Пусть (t_1^*,t_2) произвольная точка из Π.

По условию $\overline{t_0}\le t_1^*\le T_{10}$. Из этого неравенства имеем

$$\overline{t_0}\frac{C_2-C_1}{T_{10}-\overline{t_0}}+\frac{C_1(T_{10})-C_2(\overline{t_0})}{T_{10}-\overline{t_0}}\ge at_1^*+b\ge T_{10}\frac{C_2-C_1}{T_{10}-\overline{t_0}}+\frac{C_1(T_{10})-C_2(\overline{t_0})}{T_{10}-\overline{t_0}}$$

или $C_1\ge at_1^*+b\ge C_2$.

Функция at_1+bпри $\overline{t_0}\le t_1\le T_{10}$ убывает, следовательно произвольному t_1^* из $[\overline{t_0},T_{10}]$соответствует единственное $C^*\in[C_2,C_1]$ т.е. $at_1^*+b=C^*$.

Рассмотрим функции $u(t_1,0)$, $at_1\ +b$ при $\overline{t_0}\le t_1\le T_{10}$. Значения этих функций совпадают при $t_1=\overline{t_0}$ и $t_1=T_{10}$. Докажем, что при $\overline{t_0}\le t_1\le T_{10}:at_1+b>u(t_1,0)$. Функция at_1+b на рассматриваемом интервале, определяет отрезок соединяющий точки $(\overline{t_0};C_1)$ и $(T_{10};C_2)$..

Исследуем функцию $u(t_1,0)$. Согласно условия U_{20} данная функция убывает при $\overline{t_0} \le t_1 < T_0$, возрастает при $T_0 < t_1 < T_{10}$. $t_1 = T_0$ является точкой минимума. Далее $\frac{d^2u(t_1,0)}{dt_1^{\,2}} = \operatorname{Re}\lambda(t_1) > 0$, $\overline{t_0} < t_1 < T_{10}$. Следовательно, график функции $u(t_1,0)$, на рассматриваемом интервале выпуклостью обращен вниз. Тогда, отрезок определяемый функцией $at_1 + b$ располагается выше графика функции $u(t_1,0)$ т.е. $at_1 + b > u(t_1,0)$ [2].Дальнейшее доказательство леммы повторяется как и в лемме 3. Проведя эти доказательства получим все утверждения леммы 4.

Следствие 1: Кривая (K_0) и прямая $\overline{t_0} \le t_1 = const \le T_{10}$ имеют единственную точку пересечения.

Определим кривую $(K_0^{\,*})$ симметричную к (K_0). Область ограниченную (K_0) и $(K_0^{\,*})$ обозначим H_1.

Лемма 4: При выполнении условий U_1, U_2, U_3 множество H_1 является строго размеченным по некоторому $\{p(t_0,t)\}$.

Доказательство: $\forall t \in H_1$ множество $\{p(t_0,t)\}$ определим следующим образом. $p(t_0,t)$ состоит из: части (K_0) $[(\overline{t_0};0),(t_1;\tilde{t}_2)]$; прямолинейного отрезка $[(t_1;\tilde{t}_2),(t_1;t_2)]$.

По первой части пути $p(t_0,t)$ функция $u(t_1,t_2)$ убывает по лемме 3. В силу условия $Jm\lambda(t) > 0$ функция $u(t_1,t_2)$ так же убывает на другой части пути $p(t_0,t)$.

Выполняется условие U, тогда $H_1'(u,\{p(t_0,t)\},U)$. Лемма доказано.

Теперь условие U_3 заменим следующим:

U_{30}: Пусть $\forall t \in H_0 : \operatorname{Re}\lambda'(t) > 0,\ Jm\lambda'(t) \ne 0,\ \operatorname{Re}\lambda(T_{01} - iD) > 0,\ T_0 < T_{01} < T$.

Введем обозначения

$$P = \{(t_1,t_2) : t_{01} \le t_1 \le T_1, -D \le t_2 \le 0\}(t_0 < t_{01} < T_0),$$

$$H_{00} = \{(t_1,t_2) : t_0 \le t_1 \le T, -D \le t_2 \le 0\}.$$

Лемма5: Пусть U_1, U_{20}, U_{30}. Тогда:

1) существует линия уровня $\operatorname{Re}\lambda(t) = 0(L)$ проходящая через точку $(T_0;0)$ и принадлежащая P;

2) Кривая (L) с любым отрезком прямой $t_1 = const$, принадлежащего H_{00}, имеет единственную точку пересечения.

3) Кривая (L) делит область H_{00} на части H_1 и H_2. $\forall t \in H_1 : \operatorname{Re}\lambda_1(t) \le 0$, $\forall t \in H_2 : \operatorname{Re}\lambda_1(t) \ge 0$, причем равенство имеет место только на (L);

Доказательство: Для определенности возьмем $Jm\lambda'(t) < 0$. Рассмотрим область P. Из условий $\operatorname{Re}\lambda'(t) > 0,\ \operatorname{Re}\lambda(t_0) < 0,\ \operatorname{Re}\lambda(T_0) = 0$ вытекает что $\operatorname{Re}\lambda(t_{01}) < 0$. Тогда на отрезке $\{(t_{01};t_2) : -D \le t_2 \le D\}$ (O_1) функция $\operatorname{Re}\lambda(t\ ) < 0$ (в силу $Jm\lambda(t) > 0$). Аналогично из $\operatorname{Re}\lambda(T_{01} - iD) > 0$ и $Jm\lambda'(t) < 0$ вытекает, что на отрезке $\{(T_{01};t_2) : -D \le t_2 \le D\}$ (O_2) функция $\operatorname{Re}\lambda(t\ ) > 0$.

На отрезке (O_1) возьмем произвольную точку (t_{01},t_2). Через эту точку проведем прямую параллельную оси t_1. Эта прямая с отрезком (O_2) пересекается в точке (T_1,t_2). На этом отрезке (O_3) рассмотрим функцию $\operatorname{Re}\lambda(t\ )$. Согласно условия $\forall t \in H_2 : \operatorname{Re}\lambda'(t) > 0$, данная функция возрастает на (O_3). Так как, $\operatorname{Re}\lambda(t_{01} + it_2) < 0$, $\operatorname{Re}\lambda(T_{01} + it_2) > 0$, то на (O_3) существует единственная точка (t_1,t_2) и $\operatorname{Re}\lambda_1(t_1 + it_2) = 0$. Это соответствие между t_1 и t_2 в

Р определяет некоторую непрерывную кривую (L). Непрерывность следует, из теоремы существования и единственности неявной функции.

По условию $\operatorname{Re}\lambda(T_0)=0$, следовательно, (L) проходит через точку $(T_0;0)$. Первая часть леммы доказана.

Проведем произвольную прямую $t_1 = const$ пересекающуюся с (L). Допустим, что эта прямая с (L) пересекается в двух точках. На прямолинейном отрезке соединяющем эти точки рассмотрим функцию $\operatorname{Re}\lambda(t\ )$. На концах рассматриваемого отрезка $\operatorname{Re}\lambda_1(t)=0$. Это противоречит условию, $Jm\lambda'(t)<0$ т.е. функция $\operatorname{Re}\lambda(t\ )$ возрастает по t_2 при фиксированном t_1. Анолагично доказывается, что (L) с прямой $t_2 = const$ пересекается только в одной точке. Отсюда в силу $Jm\lambda'(t)<0$ следует, что часть (L) идущая «сверху» распологается слева от прямой $t_1 = const$ (выше прямой $t_2 = const$).

Теперь докажем третью часть леммы . (L) по определению область H_{00} делит на две части. Одна часть содержит отрезок $[t_0,T_0)$, другая $[T_0,T\ ]$. Первую часть обозначим H_1, вторую H_2.

Пусть $(t_1;t_2)\in H_1$. Через эту точку проведем прямую, параллельную оси t_1. Эта прямая с (L) имеет единственную точку пересечения $(t_1^*;t_2)$. Функцию $\operatorname{Re}\lambda(t\ )$ рассмотрим на отрезке (O_4)соединяющего точки и$(t_1\ ;t_2)$, $(t_1^*;t_2)$. Отрезок (O_4) пересекает отрезок (O_1) в точке $(t_1^{**}\ ;t_2)$. Функция $\operatorname{Re}\lambda(t\ )$ в силу условия $\operatorname{Re}\lambda'(t)>0$ возрастает на отрезке (O_4) и $\operatorname{Re}\lambda(t_1^{**},t_2)<0$, $\operatorname{Re}\lambda(t_1^{*},t_2)=0$.

Тогда $\operatorname{Re}\lambda(t_1+it_2)<0$. Таким образом $\forall t\in H_1 : \operatorname{Re}\lambda(t)\le 0$. Аналогично доказывается, что $\forall t\in H_2 : \operatorname{Re}\lambda(t)\ge 0$. По определению областей H_1 и H_2равенство имеет место только на (L). Лемма доказана.

Примечание 2: Лемма 6 справедлива и в том случае, если в U_{30} $Jm\lambda'(t)>0$ и вместо условия $\operatorname{Re}(T_{01}-iD)>0$ выполняется $\operatorname{Re}(t_{01}+iD)<0$ $(t_0<t_{01}<T_0)$.

Лемма 6: Пусть выполнены U_1,U_{20},U_{30}. Тогда из множества линии уровня функции $u(t_1,t_2)$:

1) пересекающиеся с (L) имеют единственную точку пересечения;
2) существуют линии уровня, соединяющие некоторые точки интервалов $[t_0,T_0)$ и $(T_0,T]$.

Доказательство: Как и в предыдущем случае возьмем $Jm\lambda'(t)<0$. В силу U_1 область H полностью покрывается линиями уровней $u(t_1,t_2)=const$ и эти линии уровня обладают всеми свойствами линии уровня гармонических функций . $\forall t\in H : Jm\lambda(t)>0$, следовательно по теореме существования и единственности неявной функции из уравнения $u(t_1,t_2)=C-const$ определяется единственная, однозначная, непрерывно дифференцируемая функция $t_2=\varphi(t_1,C)$. Производная этой функции равна

$$t_2' = \frac{\operatorname{Re}\lambda(t)}{Jm(t)}\ t \quad .$$

Названная теорема в данном случае точно не определяет свойства функции $t_2=\varphi(t_1,C)$ (область существование, монотонность и.т. д), что делает неприменимы эти функции к исследованию свойств линии уровня. Для изучения характера линии уровня поступим следующим образом:

Из леммы 5 и условия $Jm\lambda(t)>0$ вытекает, что линия уровня $u(t_1,t_2)=const$:

1) с произвольным отрезком, параллельным действительной оси и содержащимся в H_{00}, может пересекаться только в двух точках. Одна точка принадлежит H_1 другая H_2
2) с произвольным отрезком, параллельным мнимой оси и содержащимся в H пересекается только в одной точке.

На (L) возьмем произвольную точку $(t_1^*;t_2^*)$ и линия уровня проходящего через эту точку обозначим C.

Теперь докажем, что C и (L) имеют единственную точку пересечения.

Через точку $(t_1^*;t_2^*)$ проведем прямую параллельную оси t_1. На отрезке этой прямой принадлежащего H_{00} рассмотрим функцию $u(t_1,t_2)$. В силу леммы 5 для $t_0\le t_1<t_1^*$ функция $u(t_1,t_2)$ убывает для $t_1^*<t_1\le T$ возрастает.

Таким образом, $\forall t_1\in[t_0,T]: u(t_1,t_2^*)\ge C$, причем равенство имеет место только при $t_1=t_1^*$. С другой стороны $\forall t\in H: Jm\lambda(t)>0$ т.е. функция $u(t_1,t_2)$ убывает по t_2 при фиксированном. Отсюда следует, что для любой точки $(t_1^{**};t_2^{**})$ расположенной ниже рассматриваемого отрезке выполняется $u(t_1^*,t_2^*)>C$. Таким образом линия уровня C располагается выше этой прямой.

Далее через точку $(t_1^*;t_2^*)$ проведем прямую параллельную оси t_2. По леммы 6, линия (L) идущая «сверху» располагается слева от этой прямой. Согласно условия $Jm\lambda(t)>0$, линия уровня C пересекая (L) в точке, $(t_1^*;t_2^*)$ распологается справа от рассматриваемой прямой. Если предположить, что C пересекает (L) еще в другой точке, отличной от $(t_1^*;t_2^*)$, то C пересекает прямую, параллельную оси t_2. В силу $Jm\lambda(t)>0$, линия C не пересекает эту прямую.

Докажем вторую часть леммы. Согласно леммы 6 кривая (L) отрезок $\{(t_1;-D),t_{01}\le t_1\le T_{01}\}$ пересекает в точке $(t_{02};-D)$ и $T_0\le t_{02}$. Значение функции $u(t_1,t_2)$ в этой точке обозначим C_0. $C_0=u(t_{02};-D)$. Еще рассмотрим точки $(t_0;-D)$, $(T;-D)$, $(t_0;0)$, $(T;0)$, $(T_0;0)$.

Пусть $u(t_0;-D)=C_{01}$, $u(t_0;0)=C_{02}$, $u(T_0;0)=C_{03}$, $u(T\ ;0)=C_{04}$, $u(T;-D)=C_{05}$.

Отрезок соединяющий: точки $(t_0;-D)$, $(t_{02};-D)$ обозначим (O_5); точки $(t_0;-D),(t_0;0)$ обозначим (O_6); точки $(t_0;0),(T_0;0)$ обозначим (O_7); точки $(T_0;0)$, $(T;0)$ обозначим (O_8); точки $(T\ ;0)$, $(T;-D)$ обозначим (O_9); точки $(T;-D)$, $(t_{02};-D)$ обозначим (O_{10}).

Сравним значения функции $u(t_1,t_2)$ в точках $(T_0;0)$, $(t_{02};0)$, $(t_{02};-D)$. На отрезке (O_8) функция $u(t_1,0)$ возрастает, значит $u(T_0;0)=C_{03}<u(t_{02},0)$ $\left(\dfrac{du}{dt_1}=\operatorname{Re}\lambda(t)>0\right)$.

На отрезке соединяющем точки $(t_{02};-D)$, $(t_{02};0)$, в силу условия $Jm\lambda(t)>0$, функция $u(t_1,t_2)$ убывает, следовательно $u(t_{02};0)<u(t_{02},-D)=C_0$.

Отсюда следует, что $C_{03}<C_0$. Рассмотрим отрезка $(O_5),(O_6)$. На этих отрезках функция $u(t_1,t_2)$ убывает, тогда $C_{01}>C_0$, $C_{01}>C_{02}$. Если сравнить C_0 и C_{02}, то возможны случаи: 1) $C_0\ge C_{02}$, 2) $C_0<C_{02}$. Пусть выполняется первый случай т.е. $C_0\ge C_{02}$. В этом случае, на отрезке (O_6) существует единственная точка $(t_0;t_{21})$ и $u(t_0,t_{21})=C_0$. На отрезке (O_5) возьмем произвольную точку $(t_1;-D)$ $(u(t_1,-D)>C_0)$ и через эту точку проведем отрезок параллельный оси t_2 и принадлежащий H. Этот отрезок с (O_7) пересекается в точке $(t_1;0)$. Поскольку на (O_7) функция $u(t_1,t_2)$ убывает, то $C_{02} > u(t_1,0)$. Тогда $C_0 > u(t_1,0)$. На отрезке соединяющем точки $(t_1;-D)$, $(t_1;0)$ функция $u(t_1,t_2)$ убывает и на концах принимает значения $u(t_1,-D) > C_0$, $u(t_1,0) < C_0$. Следовательно, на этом отрезке существует единственная точка $(t_1\ ;t_2)$ и $u(t_1,t_2) = C_0$. Доказано, что при $t_0 \le t_1 \le t_{02}$ существует линия уровня $u(t_1,t_2) = C_0$ соединяющая точки $(t_0\ ;t_{21})$ и $(t_{02};-D)$ $(-D < t_{21} \le 0)$.

Пусть $C_0 < C_{02}$. Рассмотрим отрезок (O_7). На концах этого отрезка функция $u(t_1,t_2)$ принимает значения $u(t_0;0) = C_{02} > C_{03} = u(T_0,0)$ и убывает.

Так как, по условию $C_{03} < C_0 < C_{02}$, то отсюда вытекает, что на отрезке (O_7) существует единственная $(t_{11};0)$ и $u(t_{11},0) = C_0$.

Поступая, как и в предыдущем случае докажем существование линии уровня соединяющей точки $(t_{11};0)$ и $(t_{02};-D)$. На этот раз можно рассмотреть отрезок $[t_{11},t_{02}] \subset (O_7)$.

Теперь, рассмотрим отрезки (O_{10}), (O_9). На отрезке (O_{10}) функция $u(t_1,t_2)$ возрастает по лемме 6. На концах отрезка принимает значения $u(t_{02};-D) = C_0 < C_{05} = u(T,-D)$. На отрезке (O_9) функция убывает, следовательно $u(T;-D) = C_{05} < C_{04} = u(T,0)$. Как и в предыдущем случае для C_0 и C_4 имеются два случая: 1) $C_0 \ge C_{04}$; 2) $C_0 < C_{04}$. В первом случае линия уровня соединяет точки $(t_{02};-D)$, $(T\ ;t_{22}) \in (O_9)$ $(-D < t_{22} \le 0)$, во втором случае соедиеяет точки $(t_{02};-D)$, $(t_{12};0)$ $(T_0 < t_{12} < T)$.

Подведя итог можем сказать, что при условии $C_0 < C_{02}, C_0 < C_{04}$ линия уровня $u(t_1,t_2) = C_0$ соединяет точки $(t_{11};0)$ и $(t_{12};0)$. Эти точки принадлежит интервалам $[t_0,T_0),(T_0,T]$. Отметим, что все линии уровня $u(t_1,t_2) = C(C_{03} < C < C_0)$ также соединяют некоторые точки интервалов $[t_0,T_0),(T_0,T]$.

Если хотя бы одна, из условий $C_0 < C_{02}, C_0 < C_{04}$ не выполняется, то линия уровня $u(t_1,t_2) = C_0$ не соединяет точки интервалов $[t_0,T_0),(T_0,T]$. По крайней мере, один конец не принадлежит к одному из интервалов.

Пусть $C_0 > C_{02}$ и $, C_0 > C_{04}$. Для определенности, предположим $C_{02} > C_{04}$ рассматривается аналогично.

В рассматриваемом случае $C_0 > C_{04} > C_{02} > C_{03}$. Рассмотрим отрезок (O_8).

Функция $u(t_1,t_2)$ возрастает на этом отрезке и $u(T_0;0) = C_{03} < C_{04} = u(T\ ,0)$. Значит существует единственная точка $(t_{13};0) = C_{02}$. На отрезке $[t_0,t_{13}]$ действительной оси, возьмем произвольную точку t_1. Имеем $u(t_1,0\ ) < C_{02}$. Из точки $(t_1;0\ )$ проведем прямую, параллельную оси t_2. Эта прямая с линией уровня C_0 (свойства отмеченное вначале) пересекается в одной точке $(t_1;t_2^*)$. На прямолинейном отрезке соединяющем точки $(t_1;t_2^*)$, $(t_1;0\ )$ $u(t_1,t_2)$ убывает (условие $Jm\lambda(t) > 0$) и на концах принимает значения $u(t_0,0) < C_{02} < C_0 = u(t_1,t_2^*)$. Тогда существует единственная точка $(t_1;t_2)$ на этом отрезке $A_1(t_1,t_2) = C_{02}$. Это соответствие на $[t_0,t_{13}]$ определяет линию уровня $A_1(t_1,t_2) = C_{02}$, соединяющую точки $(t_0;0)$, $(t_{13};0)$ $(T_0 < t_{13} < T)$.

Нетрудно доказать, что линии уровня $C(C_{03} < C < C_{02})$ также соединяют некоторые точки интервалов $[t_0,T_0),(T_0,T]$. Лемма доказана.

Литература:

1. М.И. Иманалиев, К.С.Алыбаев Сингулярно возмущенные уравнения при нарушении условия устойчивости. Жалал Абад: 2001.-173с.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений Шишкова М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных.
3. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.- М.: Наука, 1975,-248с.
4. Нейшдадт А.И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. / Успехи мат. Наук.-1986.-Т.41, вып 4.