УДК 517.968

Г.Б. Сапарова – к.ф.-м.н.,доцент ОшТУ
G.B. Saparova – c.ph.-m.s., associate prof. OshTU

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА С РАЗРЫВНЫМ ЯДРОМ

В данной статье рассматривается вспомогательная задача для построения регуляризации решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода

Ключевые слова: интегральное уравнение, уравнения второго рода, уравнения Фредгольма.

UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE FREDHOLM INTEGRAL EQUATION OF THE SECOND KIND WITH DISCONTINUOUS KERNEL

This article discusses how to construct auxiliary problem regularization solutions Fredholm integral equation of the first kind

Keywords: integral equation of the second kind of equation, Fredholm equation.

Рассмотрим уравнение

$$u(t)=\int_a^t m(s)u(s)ds+\int_t^b n(s)u(s)ds+f(t), \qquad (1)$$

где m(s),n(s) – заданные функции, u(t)- неизвестная функция.

Интегральное уравнение Фредгольма первого рода при определенных условиях, рассматривались на разных функциональных пространствах. Так в работе [1] предложен метод регуляризации для интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода исследовались в [2,3,4,5,6] и других работах.

В [4] получена оценка точности приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода в равномерной метрике.

ТЕОРЕМА 1 . Пусть m(t),n(t) и *f(t)* – непрерывные функции на [a, b] , и

$$\beta=1-\int_a^b n(s)e^{\int_a^s[m(s)-n(s)]ds}\neq 0. \qquad (2)$$

Тогда существует единственное решение уравнения (1), причем это решение определяется по формуле

$$u(t)=\frac{1}{\beta}\int_a^b n(s)e^{\int_a^t[m(s)-n(s)]ds}f(s)ds+\frac{1}{\beta}\int_a^b[\int_s^b e^{\int_s^\tau[m(\tau)-n(\tau)]d\tau+\int_a^t[m(s)-n(s)]ds}n(\tau)\,d\tau]\cdot$$

$$\cdot[m(s)-n(s)]f(s)ds+f(t)+\int_s^b e^{\int_s^t[m(s)-n(s)]ds}[m(s)-n(s)]f(s)ds. \qquad (3)$$

Доказательство. Приведем уравнение (1) к виду:

$$u(t)=\int_a^t[m(s)-n(s)]u(s)ds+\int_a^b n(s)u(s)ds+f(t).$$

Обозначим через

$$\alpha=\int_a^b n(s)u(s)ds. \qquad (4)$$

Отсюда

$$u(t)=\int_a^t[m(s)-n(s)]u(s)ds+\alpha+f(t). \qquad (5)$$

Используя резольвенту ядра [m(s)-n(s)] из (5), имеем

$$u(t)=\alpha+f(t)+\int_a^t e^{\int_s^t[m(s)-n(s)]ds}[m(s)-n(s)][\alpha+f(s)]ds=\alpha(1+$$

$$+\int_a^t e^{\int_s^t[m(s)-n(s)]ds}[m(s)-n(s)]+f(t)+\int_a^t e^{\int_s^t[m(s)-n(s)]ds}[m(s)-n(s)]f(s)ds.$$

Отсюда, учитывая

$$\int_a^t e^{\int_s^t[m(s)-n(s)]ds}[m(s)-n(s)]ds=e^{\int_s^t[m(s)-n(s)]ds}-1$$

И введя обозначение

$$F(t)=f(t)+\int_a^t e^{\int_s^t[m(s)-n(s)]ds}[m(s)-n(s)]f(s)ds. \qquad (6)$$

Имеем

$$u(t)=\alpha e^{\int_a^t[m(s)-n(s)]ds}+F(t) \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (4), получаем

$$\alpha=\int_a^b n(s)[\alpha e^{\int_a^s[m(s)-n(s)]ds}+F(t)]ds,$$

$$\alpha[1-\int_a^b n(s)[\alpha e^{\int_a^s[m(s)-n(s)]ds}ds]=\int_a^b n(s)F(s)ds. \qquad (8)$$

Учитывая условие (2), имеем

$$\alpha = \frac{1}{\beta}\int_a^b n(s)F(s)ds. \qquad (9)$$

Подставляем (9) в соотношение (7) и получаем

$$u(t) = \frac{1}{\beta}[\int_a^b n(s)F(s)ds]\cdot e^{\int_a^t [m(s)-n(s)]ds} + F(t). \qquad (10)$$

Подставляя (6) в формулу (10) и применяя формулу Дирихле, имеем

$$u(t) = \frac{1}{\beta}\int_a^b n(s)[f(s) + \int_a^s e^{\int_\tau^s [m(\tau)-n(\tau)]d\tau}[m(\tau)-n(\tau)]f(\tau)d\tau]ds\cdot e^{\int_a^t [m(s)-n(s)]ds} +$$

$$+ f(t) + \int_a^t e^{\int_s^t [m(s)-n(s)]ds}[m(s)-n(s)]f(s)ds.$$

Значит,

$$u(t) = \frac{1}{\beta}\int_a^b n(s)\cdot e^{\int_a^t [m(s)-n(s)]ds} f(s)ds + \frac{1}{\beta}\int_a^b [\int_s^b e^{\int_s^\tau [m(\tau)-n(\tau)]d\tau + \int_a^t [m(s)-n(s)]ds} n(\tau)d\tau]\cdot$$

$$\cdot[m(s)-n(s)]f(s)ds + f(t) + \int_a^t e^{\int_s^t [m(s)-n(s)]ds}[m(s)-n(s)]f(s)ds.$$

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon u(t,\varepsilon) = \int_a^t m(s)u(s,\varepsilon)ds + \int_t^b n(s)u(s,\varepsilon)ds + f(t), \qquad (11)$$

где $0\langle\varepsilon$ - малый параметр.

Следствие. Пусть $m(t), n(t), f(t)$ непрерывные функции на [a,b], $0\langle\varepsilon$ - малый параметр, и существует $\varepsilon_0>0$, такое что

$$\beta(\varepsilon) = 1 - \int_a^b \frac{n(s)}{\varepsilon} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_a^s [m(s)-n(s)]ds} ds \neq 0 \qquad (12)$$

при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.

Тогда существует единственное непрерывное решение на [a,b] уравнения (11), представимое в виде

$$u(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2\beta(\varepsilon)}\int_a^b n(s)\cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t[m(s)-n(s)]ds} f(s)ds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^3\beta(\varepsilon)}\int_a^b\left[\int_s^b e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^\tau[m(\tau)-n(\tau)]d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t[m(s)-n(s)]ds} n(\tau)d\tau\right]\cdot[m(s)-n(s)]f(s)ds+ \tag{13}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}f(t)+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_a^t e^{\int_s^t[m(s)-n(s)]ds}[m(s)-n(s)]f(s)ds.$$

Литература:

1. Асанов А.А, Сыдыков Т., Сапарова Г. Регуляризация интегрального уравнения Фредгольма первого рода с разрывным ядром.//Сб. науч. статей. – Бишкек:ИГЗ КГПУ им. И.Арабаева, 2002. – с. 225-23
2. Иманалиев М.И. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложения. – Фрунзе: Илим, 1977 – 348 с.
3. Иманалиев М.И., Асанов А.А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода. //Исследования по интегро – дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988 –Вып. 21.-с.3-38
4. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. Докл.АН СССР. – 1959 - Т.127, № 1-с.31-33
5. Саадабаев А.С. Оценка точности приближенного решения интегрального уравнения первого рода в равномерной метрике.// там же - с. 77-83.
6. Сыдыков Т. Приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода в пространстве С(0,1).// Всесоюз. конф. по некорректно поставленным задачам.- Фрунзе: Илим, 1979