УДК 517.956.6

А.Сопуев, Т.Ы.Саадалов - д.ф.-м.н., проф., ОшГУ, директор СЦ ОшТУ
A.Sopuev, T.Y.Saadalov – d.ph-m.s., prof. OshSU, director SC OshTU

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПСЕВДОПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ

Доказано однозначная разрешимость краевой задачи для линейного смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения.

Ключевые слова: уравнения, смешанное уравнения, прямоугольник, неизвестные функции.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR MIXED-PSEVDOPARABOLO FOURTH-ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS WITH NONLOCAL CONJUGATE CONDITION

There was proved the unique solvability of boundary value problems for linear mixed-psevdoparabolo fourth-order hyperbolic equations with nonlocal conjugate condition.

Keywords: equation, mixed equations, rectangle, unknown functions.

В работе рассмотрены краевые задачи для смешанного псевдопараболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с нелокальным условием сопряжения. Такие задачи могут быть математической моделью процесса теплопередачи в составной системе с разными теплофизическими характеристиками [1, 2].

Пусть D означает прямоугольник, с вершинами $A_0(0,h),\ A_1(0,-h_1),$ $B_1(\ell,-h_1),\ B_0(\ell,h)\ (h,\ h_1,\ell>0),$ а $D_1=D\bigcap(y>0),\ D_2=D\cap(y<0)$.

Задача 1. *Найти функцию* $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap[C^{2+2}(D_1)\cup C^{3+1}(D_2)],$ *удовлетворяющую в области* D_1 *уравнению*

$$L_1(u)\equiv u_{xxyy}+a_1(x,y)u_{xxy}+a_2(x,y)u_{xyy}+b_1(x,y)u_{xx}+b_2(x,y)u_{xy}+ \\ +b_3(x,y)u_{yy}+c_1(x,y)u_x+c_2(x,y)u_y+d(x,y)u=f_1(x,y), \qquad (1)$$

граничным условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \qquad (2)$$

$$u(x,h)=\psi(x),\ 0\le x\le \ell, \qquad (3)$$

удовлетворяющую в области D_2 *уравнению*

$$L_2(u)\equiv u_{xxxy}+\alpha_1(x,y)u_{xxx}+\alpha_2(x,y)u_{xxy}+\beta_1(x,y)u_{xx}+ \\ +\beta_2(x,y)u_{xy}+\gamma_1(x,y)u_x+\gamma_2(x,y)u_y+\delta(x,y)u=f_2(x,y), \qquad (4)$$

граничным условиям

$$u(0,y)=\chi_1(y),\ u_x(0,y)=\chi_2(y),\ u_{xx}(0,y)=\chi_3(y),\ \ -h_1\le y\le 0, \qquad (5)$$

и условиям сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ u_y(x,-0)=\rho(x)u_y(x,+0)+\int_0^x\theta(x,\xi)u_y(\xi,+0)d\xi+r(x), \qquad (6)$$

где $a_i,\ c_i,\ \alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i\ (i=1,2),\ b_j,\ \chi_j\ (j=\overline{1,3}),\ \ \varphi_1,\varphi_2,\ d,\ \delta,\psi,\rho,\theta,r$ *- заданные функции, причем*

$$a_i,\ c_i(i=1,2),\ b_j(j=\overline{1,3}),\ d,\ a_{1xxy},\ a_{2xyy},b_{1xx},\ b_{2xy},\ b_{3yy},\ c_{1x},\ c_{2y}\in C(\overline{D_1}),$$
$$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i(i=1,2),\delta,\ f_2,\alpha_{1xxx},\alpha_{2xxy},\beta_{1xx},\beta_{2xxy},\gamma_{1x},\gamma_{2y},\theta_{xxx}\in C\left(\overline{D_2}\right),\rho,r\in C^3[0,\ell], \qquad (7)$$
$$\varphi_1,\varphi_2\in C^2[0,h],\ \psi\in C^2[0,\ell],\ \chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3\in C^1[-h_1,0],$$
$$\varphi_1(0)=\chi_1(0),\ \varphi_2(0)=\chi_2(0),\ \varphi_2(h)=\psi(0).$$

Отметим, что прямые *x=const* и *y=const* являются двукратными характеристиками уравнения (1), а для уравнения (4) прямая *y=const* является трехкратной, прямая *x=const* - простой характеристикой. Таким образом, уравнение (1) в области D_1 имеет два двукратных характеристик, а уравнение (4) в области D_2 имеет одну трехкратную и одну простую характеристику.

Задача 1, в случае, когда $\rho(x)\equiv 1,\ \theta(x,\xi)\equiv 0,\ r(x)\equiv 0$, рассмотрена в [3].

Введем следующие обозначения

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau(x),\ 0\le x\le\ell,$$
$$u_y(x,+0)=v_1(x),\ \ u_y(x,-0)=v_2(x),\ 0\le x\le\ell, \qquad (8)$$

где $\tau(x),\ v_1(x),\ v_2(x)$ - пока неизвестные функции.

Тогда в силу постановки задачи 1 из второго условия (6) получим

$$v_1(x)=\rho(x)v_2(x)+\int_0^x\theta(x,\xi)v_2(\xi)d\xi+r(x), \qquad (9)$$

Рассмотрим задачу Гурса для уравнения (1) с условиями (2) и

$$u(x,0)=\tau(x),u_y(x,+0)=v_1(x),0\le x\le\ell. \qquad (10)$$

Решение этой задачи с помощью функции Римана имеет следующее представление [3]:

$$\begin{aligned}u(x,y)&=A_1(x,y)\varphi_1(y)-\vartheta_\eta(x,y;0,y)\varphi_2(y)+\int_0^y[B_1(x,y;\eta)\varphi_2(\eta)-\\&-C_1(x,y;\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta+\int_0^x[\vartheta(x,y;\xi,0)v_1''(\xi)-D_1(x,y;\xi)\tau''(\xi)+\\&+a_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)v_1'(\xi)-E_1(x,y;\xi)\tau'(\xi)++b_3(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)v_1(\xi)-\\&-F_1(x,y;\xi)\tau(\xi)]d\xi+\int_0^x d\xi\int_0^y\vartheta(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi,\end{aligned} \qquad (11)$$

где

$$A_1(x,y)=\vartheta_{\eta\xi}(x,y;0,y)-a_2(0,y)\vartheta_\eta(x,y;0,y),$$
$$B_1(x,y;\eta)=\vartheta_{\eta\eta}(x,y;0,\eta)-a_1(0,\eta)\vartheta_\eta(x,y;0,\eta)+[b_1(0,\eta)-a_{1\eta}(0,\eta)]\vartheta(x,y;0,\eta),$$
$$\begin{aligned}C_1(x,y;\eta)&=\vartheta_{\xi\eta\eta}(x,y;0,\eta)-a_1(0,\eta)\vartheta_{\xi\eta}(x,y;0,\eta)-\\&-a_2(0,\eta)\vartheta_{\eta\eta}(x,y;0,\eta)+[b_1(0,\eta)-a_{1\eta}(0,\eta)]\vartheta_\xi(x,y;0,\eta)+\\&+[b_2(0,\eta)-a_{1\xi}(0,\eta)-2a_{2\eta}(0,\eta)]\vartheta_\eta(x,y;0,\eta)+\\&+[b_{1\xi}(0,\eta)-a_{1\xi\eta}(0,\eta)-a_{2\eta\eta}(0,\eta)+b_{2\eta}(0,\eta)-c_1(0,\eta)]\vartheta(x,y;0,\eta),\end{aligned}$$
$$D_1(x,y;\xi)=\vartheta_\eta(x,y;\xi,0)-a_1(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0),$$
$$E_1(x,y;\xi)=a_2(\xi,0)\vartheta_\eta(x,y;\xi,0)+[a_{2\eta}(\xi,0)-b_2(\xi,0)]\vartheta(x,y;\xi,0),$$
$$F_1(x,y;\xi)=b_3(\xi,0)\vartheta_\eta(x,y;\xi,0)+[b_{3\eta}(\xi,0)-c_2(\xi,0)]\vartheta(x,y;\xi,0),$$

а $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана для уравнения (1) [3].

Используя условие (3) из (9) получаем соотношение для функции $\tau(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное из области D_1:

$$\int_0^x [\vartheta(x,h;\xi,0)\nu_1''(\xi) - D_1(x,h;\xi)\tau''(\xi) + a_2(\xi,0)\vartheta(x,h;\xi,0)\nu_1'(\xi) + \\ - E_1(x,h;\xi)\tau'(\xi) + b_3(\xi,0)\vartheta(x,h;\xi,0)\nu_1(\xi) - F_1(x,h;\xi)\tau(\xi)]d\xi = \Phi(x), \tag{12}$$

где

$$\Phi(x) = \psi(x) - A_1(x,h)\varphi_1(h) + \vartheta_\eta(x,h;0,h)\varphi_2(h) - \\ - \int_0^h [B_1(x,h;\eta)\varphi_2(\eta) - C_1(x,h;\eta)\varphi_1(\eta)]d\eta - \int_0^x d\xi \int_0^h \vartheta(x,h;\xi,\eta) f(\xi,\eta)d\eta.$$

Осуществляя интегрирование по частям в (12), учитывая свойства функции $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ и условия согласования

$\tau(0) = \varphi_1(0), \tau'(0) = \varphi_2(0),\ \nu_1(0) = \varphi_1'(0),\ \nu_1'(0) = \varphi_2'(0),$ имеем

$$D_{1\xi}(x,h;x)\tau(x) - \vartheta_\xi(x,h;x,0)\nu_1(x) = \int_0^x H_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + \\ + \int_0^x H_2(x,\xi)\nu_1(\xi)d\xi + \Phi_1(x), \tag{13}$$

где

$$H_1(x,\xi) = D_{1\xi\xi}(x,h;\xi) - E_{1\xi}(x,h;\xi) + F_1(x,h;\xi),$$

$$H_2(x,\xi) = -\vartheta_{\xi\xi}(x,h;\xi,0) + a_2(\xi,0)\vartheta_\xi(x,h;\xi,0) + [a_{2\xi}(\xi,0) - b_3(\xi,0)]\vartheta(x,h;\xi,0),$$

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) - [\vartheta_\xi(x,h;0,0) - a_2(0,0)\vartheta(x,h;0,0)]\varphi_1'(0) + \vartheta(x,h;0,0)\varphi_2'(0) + \\ + [D_{1\xi}(x,h;0) - E_1(x,h;0)]\varphi_1(0) - D_1(x,h;0)\varphi_2(0).$$

С другой стороны с учетом постановки задачи 1 и устремляя *y* к нулю, из уравнения (4) получаем

$$\nu_2'''(x) + \alpha_1(x,0)\tau'''(x) + \alpha_2(x,0)\nu_2''(x) + \beta_1(x,0)\tau''(x) + \\ + \beta_2(x,0)\nu_2'(x) + \gamma_1(x,0)\tau'(x) + \gamma_2(x,0)\nu_2(x) + \delta(x,0)\tau(x) = f_2(x,0).$$

Интегрируя это уравнение и учитывая условия согласования $\nu_2(0) = \chi_1'(0),\ \nu_2'(0) = \chi_2'(0),\ \ \nu_2''(0) = \chi_3'(0)$, имеем

$$\nu_2(x) + \alpha(x,0)\tau(x) = \int_0^x H_3(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + \int_0^x H_4(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi + g_1(x), \tag{14}$$

где

$$H_3(x,\xi) = \frac{1}{2}(x-\xi)^2[\alpha_{1\xi\xi\xi}(\xi,0) - \beta_{1\xi\xi}(\xi,0) + \gamma_{1\xi}(\xi,0) - \delta(\xi,0)] - \\ - (x-\xi)[3\alpha_{1\xi\xi}(\xi,0) - 2\beta_{1\xi}(\xi,0) + \gamma_1(\xi,0)] + 3\alpha_{1\xi}(\xi,0) - \beta_1(\xi,0),$$

$$H_4(x,\xi) = -\frac{1}{2}(x-\xi)^2[\alpha_{2\xi\xi}(\xi,0) - \beta_{2\xi}(\xi,0) + \gamma_2(\xi,0)] + \\ + (x-\xi)[2\alpha_{2\xi}(\xi,0) - \beta_2(\xi,0)] - \alpha_2(\xi,0),$$

$$g_1(x)=\{\frac{1}{2}[\alpha_{1xx}(0,0)-\beta_{1x}(0,0)]x^2-[2\alpha_{1x}(0,0)-\beta_1(0,0)]x+\alpha_1(0,0)\}\chi_1(0)-\{\frac{1}{2}[\alpha_{1x}(0,0)-$$

$$-\beta_1(0,0)]x^2-\alpha_1(0,0)x\}\chi_2(0)+\frac{1}{2}\alpha_1(0,0)\chi_3(0)x^2-\{\frac{1}{2}[\alpha_{2x}(0,0)-\beta_2(0,0)]x^2-$$

$$-\alpha_2(0,0)x-1\}\chi_1'(0)+[x+\frac{1}{2}\alpha_2(0,0)x^2]\chi_2'(0)+\frac{1}{2}\chi_3'(0)x^2+\frac{1}{2}\int_0^x(x-\xi)^2f_2(\xi,0)d\xi.$$

Обращая интегральное уравнение (14) относительно $v_2(x)$, приходим к следующему соотношению

$$v_2(x)=-\alpha_1(x,0)\tau(x)+\int_0^x H_5(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+g_2(x),$$

(15)

где $H_5(x,\xi)=H_4(x,\xi)-\alpha_1(\xi,0)R(x,\xi)+\int_\xi^x R(x,t)H_4(t,\xi)dt,\quad g_2(x)=g_1(x)+$ $+\int_0^x R(x,\xi)g_1(\xi)d\xi,$ а $R(x,\xi)$ - резольвента ядра $H_4(x,\xi)$.

С учетом (15) из условия сопряжения (9) имеем

$$v_1(x)=-\alpha_1(x,0)\rho(x)\tau(x)+\int_0^x H_6(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+g_3(x), \tag{16}$$

где $H_6(x,\xi)=\rho(x)H_5(x,\xi)-\theta(x,\xi)\alpha_1(\xi,0)+\int_\xi^x\theta(x,t)H_5(t,\xi)dt,$

$$g_3(x)=\rho(x)g_2(x)+$$

$$+\int_0^x\theta(x,\xi)g_2(\xi)d\xi+r(x).$$

Исключив $v_1(x)$ из соотношений (13) и (16), получим интегральное уравнение

$$\rho_1(x)\tau_1(x)=\int_0^x K(x,\xi)\tau_1(\xi)d\xi+g(x), \tag{17}$$

где

$$\rho_1(x)=1+[\alpha_1(x,0)\rho(x)-2a_1(x,0)]\vartheta_\xi(x,h;x,0)-\int_0^h b_1(x,t)\vartheta_\xi(x,h;x,t)dt,$$

$$K(x,\xi)=H_1(x,\xi)-\alpha_1(\xi,0)\rho(\xi)H_2(x,\xi)+\vartheta_\xi(x,h;x,0)H_6(x,\xi)+$$

$$+\int_\xi^x H_2(x,t)H_6(t,\xi)dt,\ g(x)=\Phi_1(x)+\vartheta_\xi(x,h;x,0)g_3(x)+\int_0^x H_2(x,\xi)g_3(\xi)d\xi.$$

Нетрудно заметить, что если

$$\forall x\in[0,\ell]:\ \rho_1(x)\neq 0, \tag{18}$$

то уравнение (13) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, и допускает единственное решение.

В частности, если $\alpha_1(x,0)\rho(x)-2a_1(x,0)=0,\ b_1(x,y)=0$, то $\rho(x)=1$, и, следовательно, условие (18) выполняется.

Нетрудно убедиться, что если выполняется условие

$$\forall(x,y)\in\overline{D}_1: b_1(x,y)-a_{1y}(x,y)\le 0, \tag{19}$$

то

$$\forall \eta \in [0,h) : \vartheta_{\xi}(x,y;x,\eta) < 0. \qquad (20)$$

Тогда нетрудно заметить, что если

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_1 : b_1(x,y) \geq 0, \forall x \in [0,\ell] : \alpha_1(x,0)\rho(x) - 2a_1(x,0) \leq 0, \qquad (21)$$

то

$$\forall x \in [0,\ell] : \rho(x) \geq 1.$$

Следовательно, при выполнении условий (19) и (21) интегральное уравнение (17) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и допускает единственное решение. Определив $\tau_1(x)$ из уравнения (17), будем знать и $v_1(x)$. Тогда решение задачи 1 в области D_1 имеет вид (8), а в области D_2 определяется по формуле

$$u(x,y) = \vartheta_{1\xi\xi}(x,y;x,0)\tau_1(x) + \int_0^x A_3(x,y;\xi)\tau_1(\xi)d\xi +$$

$$+\int_0^y [\vartheta_1(x,y;0,\eta)\chi_3'(\eta) + \alpha_1(0,\eta)\vartheta_1(x,y;0,\eta)\chi_3(\eta) - B_3(x,y;\eta)\chi_2'(\eta) +$$

$$+ C_3(x,y;\eta)\chi_3(\eta) + D_3(x,y;\eta)\chi_3'(\eta) + E_3(x,y;\eta)\chi_1(\eta)]d\eta,$$

(22) где

$$A_3(x,y;\xi) = \vartheta_{1\xi\xi\xi}(x,y;\xi,0) - \alpha_2(\xi,0)\vartheta_{1\xi\xi}(x,y;\xi,0) + [\beta_2(\xi,0) -$$

$$- 2\alpha_{2\xi}(\xi,0)]\vartheta_{1\xi}(x,y;\xi,0) + [\beta_{2\xi}(\xi,0) - \gamma_2(\xi,0) - \alpha_{2\xi\xi}(\xi,0)]\vartheta_1(x,y;\xi,0),$$

$$B_3(x,y;\eta) = \vartheta_{1\xi}(x,y;0,\eta) - \alpha_2(0,\eta)\vartheta_1(x,y;0,\eta),$$

$$C_3(x,y;\eta) = \alpha_1(0,\eta)\vartheta_{1\xi}(x,y;0,\eta) + [a_{1\xi}(0,\eta) - \beta_1(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),$$

$$D_3(x,y;\eta) = \vartheta_{1\xi\xi}(x,y;0,\eta) - \alpha_2(0,\eta)\vartheta_{1\xi}(x,y;0,\eta) - [\alpha_{2\xi}(0,\eta) - \beta_2(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),$$

$$E_3(x,y;\eta) = \alpha_1(0,\eta)\vartheta_{1\xi\xi}(x,y;0,\eta) + [2\alpha_{1\xi}(0,\eta) - \beta_1(0,\eta)]\times$$

$$\times \vartheta_{1\xi}(x,y;0,\eta) + [\alpha_{1\xi\xi}(0,\eta) - \beta_{1\xi}(0,\eta) + \gamma_1(0,\eta)]\vartheta_1(x,y;0,\eta),$$

а $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана для уравнения (4).

Теорема 1. *Если выполняются условия (7), (19) и (21), то решение задачи 1 существует, единственно и определяется в областях D_1 и D_2 по формулам (11) и (22) соответственно.*

Литература:

1. Нахушев В.А. Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом // Вестник СамГТУ. – Вып. 42. Сер. ФМН. – 2006. – С. 11-34.
2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан. 1986. – 220 с.