УДК 517.968

А.А Асанов, Г.Б. Сапарова
Д.ф.-м.н., КТУ “Манас”, к.ф.-м.н. ОшТУ
A.A. Asanov, G.B. Saparova
D.ph.-m.s. KTU “Manas”, c.ph.-m.s. OshTU

ЕДИНСТВННОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА С РАЗРЫВНЫМ ЯДРОМ

В данной статье рассматривается вспомогательная задача для построения регуляризации решения системы интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

Ключевые слова: интегральные уравнение, уравнения Фредгольма, уравнения первого рода, уравнения второго рода.

THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF A SYSTEM OF FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND WITH DISCONTINUOUS KERNEL

This article discusses how to construct auxiliary problem regularization system solutions Fredholm integral equation of the first kind.

Keywords: integral equation, Fredholm equations of the first kind of equation, the equation of the second kind.

Рассмотрим систему

$$u(t)=\int_a^t A(s)u(s)ds+\int_t^b B(s)u(s)ds+f(t), \qquad (1)$$

где A(s),B(s) – nxn – мерные матричные функции, *f(t)* и u(t)- известная и искомая n – мерные вектор – функции.

Интегральное уравнение Фредгольма первого рода при определенных условиях, рассматривались на разных функциональных пространствах. Так в работе [1] предложен метод регуляризации для интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода исследовались в [2,3,4,5,6,7] и других работах.

В [4] получена оценка точности приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода в равномерной метрике. В [6] построена регуляризация интегрального уравнения Фредгольма первого рода с разрывным ядром. Здесь для решения уравнения (1) получена явная формула.

ТЕОРЕМА 1 . Пусть A(t),B(t) – nxn- мерные непрерывные на *[a,* b] матричные функции и *f(t)* – непрерывная на [*a,* b] вектор- функция,

det (I_n - M) ≠ 0, где I_n – nxn – мерная единичная матрица,

$$M=\int_a^b B(s)ds+\int_a^b B(s)\int_a^s X(s,\tau)[A(\tau)-B(\tau)]d\tau ds=\int_a^b B(s)X(s,a)ds. \qquad (2)$$

Тогда существует единственное решение системы (1), причем это решение определяется по формуле

$$u(t)=(I_n-M)^{-1}\cdot C+f(t)+\int_a^t X(t,s)[A(s)-B(s)](I_n-M)^{-1}\cdot Cds+$$

$$+\int_a^t X(t,s)[A(s)-B(s)]f(s)ds=X(t,a)((I_n-M)^{-1}\cdot C)+f(t)+\int_a^t X(t,s)[A(s)-B(s)]f(s)ds$$
(3)

где X(t,s)- матричная функция Коши для системы $\frac{dv}{dt}=[A(t)-B(t)]v$,

$$C=\int_a^b B(s)f(s)ds+\int_a^b B(s)\int_a^s X(s,\tau)[A(\tau)-B(\tau)]f(\tau)d\tau ds \qquad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем систему (1) к виду:

$$u(t)=\int_a^t [A(s)-B(s)]u(s)ds+\int_a^b B(s)u(s)ds+f(t).$$

Обозначим через

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \\ ....\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\int_a^b B(s)u(s)ds \qquad (5)$$

Отсюда

$$u(t)=\int_a^t [A(s)-B(s)]u(s)ds+\alpha+f(t).$$

(6)

Используя резольвенту ядра [A(s)-B(s)] из (6), имеем

$$u(t)=\alpha+f(t)+\int_a^t X(t,s)[A(s)-B(s)][\alpha+f(s)]ds \qquad (7)$$

Подставляем (7) в (5), получаем

$$\alpha=\left\{\int_a^b B(s)ds+\int_a^b B(s)\int_a^s X(s,\tau)[A(\tau)-B(\tau)]d\tau ds\right\}\cdot\alpha+$$

.

$$+\left\{\int_a^b B(s)f(s)ds+\int_a^b B(s)\int_a^s X(s,\tau)[A(\tau)-B(\tau)]f(\tau)d\tau ds\right\}$$

Отсюда имеем $I_n\alpha=M\alpha+C$ (8)

где M и C определены по формулам (2) и (4).

В силу условия теоремы из (8), получим

$$\alpha=(I_n-M)^{-1}C \qquad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получаем формулу (3). Теорема доказана.

Рассмотрим систему

$$\varepsilon u(t,\varepsilon)=-\int_a^t K(s)u(s,\varepsilon)ds-\int_t^b N(s)u(s,\varepsilon)ds+g(t), \qquad (11)$$ где $0\langle\varepsilon$ - малый параметр.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $K(t),N(t)$ - nxn – мерные непрерывные матрич-ные функции на [a,b], $f(t)$- n-мерные непрерывные вектор – функции на [a,b], $0\langle\varepsilon$ - малый параметр, $\det(I_n - M(\varepsilon))\neq 0$, при $t\in[a,b]$, $\varepsilon>0$.

где

$$M(\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b N(s)ds+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_a^b N(s)\int_a^s X(s,\tau,\varepsilon)[K(\tau)-N(\tau)]d\tau ds = \\ =-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b N(s)X(s,a,\varepsilon)ds. \qquad (12)$$

Тогда существует единственное непрерывное решение на [a,b]системы (11), представимое в виде

$$u(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}X(t,a,\varepsilon)(I_n-M(\varepsilon))^{-1}\cdot C(\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}g(t)-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_a^t X(t,s,\varepsilon)[K(s)-N(s)]g(s)ds \qquad (13)$$

где $X(t,s,\varepsilon)$- матричная функция Коши для системы $\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{\varepsilon}[K(t)-N(t)]v$,

$$C(\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b N(s)g(s)ds+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_a^b N(s)\int_a^s X(s,\tau,\varepsilon)[K(\tau)-N(\tau)]g(\tau)d\tau ds \qquad (14)$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим систему вида

$$\varepsilon\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}3 & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix}ds+\int_t^1\begin{pmatrix}2 & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Здесь

$$K(s)=\begin{pmatrix}3 & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{N(s)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2} & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{K(s)-N(s)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{g(t)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2}\\ \boldsymbol{1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a=0,b=1}.$$

Тогда из формул (12) и (14) получим

$$M(\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\frac{1}{\varepsilon}s} & 0\\0 & e^{-\frac{1}{\varepsilon}s}\end{pmatrix}ds=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1\begin{pmatrix}2e^{-\frac{1}{\varepsilon}s} & \mathrm{e}^{-\frac{1}{\varepsilon}s}\\0 & e^{-\frac{1}{\varepsilon}s}\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix}-2\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}+2\varepsilon & -\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}+\varepsilon\\0 & -\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}}+\varepsilon\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-2 & e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-1\\0 & e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-1\end{pmatrix};$$

$$C(\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}ds+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot[\int_0^s\begin{pmatrix}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)} & 0\\0 & e^{-\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}d\tau]ds=$$

$$=\begin{pmatrix}5e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-5\\e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-1\end{pmatrix};$$

$$(I_n-M(\varepsilon))^{-1}\cdot C(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\dfrac{-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}+2}{2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-7e^{-\frac{1}{\varepsilon}}+6} & \dfrac{-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}+1}{2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-7e^{-\frac{1}{\varepsilon}}+6}\\0 & \dfrac{-2e^{-\frac{1}{\varepsilon}}+3}{2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-7e^{-\frac{1}{\varepsilon}}+6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-5\\e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-4e^{-\frac{2}{\varepsilon}}+13e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-9}{2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-7e^{-\frac{1}{\varepsilon}}+6}\\\dfrac{-2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}+5e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-3}{2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-7e^{-\frac{1}{\varepsilon}}+6}\end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_a^t X(t,s,\varepsilon)[K(s)-N(s)]g(s)ds=\begin{pmatrix}\frac{2}{\varepsilon}-\frac{2}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}\\\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}\end{pmatrix};.$$

Поэтому в силу формулы (13), имеем

$$u(t)=\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{\varepsilon}t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{-4e^{-\frac{2}{\varepsilon}}+13e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-9}{2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-7e^{-\frac{1}{\varepsilon}}+6} \\ \\ \dfrac{-2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}+5e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-3}{2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-7e^{-\frac{1}{\varepsilon}}+6}\end{pmatrix}+\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix}2\\ \\ 1\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix} \frac{2}{\varepsilon}-\frac{2}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}t} \\ \\ \frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}t-\frac{1}{\varepsilon}}+\frac{3}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}}{2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-7e^{-\frac{1}{\varepsilon}}+6} \\ \\ \dfrac{-\frac{2}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}t-\frac{1}{\varepsilon}}+\frac{3}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}}{2e^{-\frac{2}{\varepsilon}}-7e^{-\frac{1}{\varepsilon}}+6}\end{pmatrix}.$$

Литература:

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. Докл.АН СССР. – 1959 -Т.127, № 1-с.31-33
2. Иманалиев М.И. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложения. – Фрунзе: Илим, 1977 – 348 с.
3. Иманалиев М.И., Асанов А.А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода. //Исследования по интегро – дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988 –Вып. 21.-с.3-38
4. Саадабаев А.С. Оценка точности приближенного решения интегрального уравнения первого рода в равномерной метрике.// там же - с. 77-83
5. Сыдыков Т. Приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода в пространстве C(0,1).// Всесоюз. конф. по некорректно поставленным задачам.- Фрунзе: Илим, 1979
6. Асанов А.А, Сыдыков Т., Сапарова Г. Регуляризация интегрального уравнения Фредгольма первого рода с разрывным ядром.//Сб. науч. статей. – Бишкек:ИГЗ КГПУ им. И.Арабаева, 2002. – с. 225-231
7. Г.Б.Сапарова. Об одном классе интегральных уравнений Фредгольма второго рода с разрывным ядром. // Исследования по интегро – дифференц. Уравнениям. – Бишкек: 2007 – Вып.36,стр.74-80.