УДК 517.95

Д.Аманов, Б.К.Бойполвонов
к.ф.-м.н., с.н.с. АН РУз, преп. Каршинский инженерно-экономический институт
D.Amanov, B.K. Boipolvonov
C.ph.-m.s., senior researcher AS RUz, teacher Karshi Engineering-Economical Institute

РАЗРЕШИМОСТЬ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В работе исследуется одна краевая задача и доказывается её регулярная, сильная разрешимость и разрешимость почти всюду. Получена априорная оценка решения. Исследован спектр задачи. Доказана дискретность спектра задачи.

Ключевые слова: уравнения высокого порядка, краевые задачи, методы решения, дискретность.

SOLVABILITY AND SPECTRAL PROPERTIES OF THE BOUNDARY-VALUE EQUATION FOR A HIGH-ORDER EQUATION

In the paper, we study one boundary-value problem and prove its regular, strong solvability and solvability almost everywhere. An a priori estimate of the solution is obtained. The spectrum of the problem is investigated. The discreteness of the spectrum of the problem is proved.

Keywords: high order equations, boundary value problems, solution methods, discreteness.

1. Постановка задачи. В области $\Omega=\{(x,t):0<x<p,0<t<T\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f(x,t). \qquad (1)$$

Уравнения высокого порядка в плоских областях изучены в работах [1], [2] и др. В этих работах изучены краевые задачи для однородных уравнений с неоднородными краевыми условиями и доказаны их регулярная разрешимость. В нашей работе мы изучаем неоднородное уравнение с однородными краевыми условиями. Это дает нам возможность применить теорию линейных операторов к исследованию краевой задачи, установить сильную разрешимость, разрешимость почти всюду и исследовать спектр задачи.

Задача. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1) удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial^{2m}u(0,t)}{\partial x^{2m}}=\frac{\partial^{2m}u(p,t)}{\partial x^{2m}}=0,\quad 0\le t\le T,\quad m=0,1,2, \qquad (2)$$

$$u(x,0)=u(x,T)=0,\quad 0\le x\le p. \qquad (3)$$

Насколько нам известно, такая задача впервые исследуется нами.

Обозначим

$$V(\Omega)=\left\{u:u\in C^{4,0}_{x,t}(\bar{\Omega})\cap C^{6,2}_{x,t}(\Omega),\text{выполняются}\,(2),(3)\right\},$$

$$W(\Omega)=\left\{f:\ f\in C^{1,0}_{x,t}(\bar{\Omega}),\ f_{xx}\in Lip_{\delta}[0,p],\ f(0,t)=f(p,t)=0\right\}.$$

Определение 1. Функцию $u(x,t)\in V(\Omega)$ назовем регулярным решением задачи при $f\in C(\Omega)$, если она в области Ω удовлетворяет уравнению (1).

Определение 2. Функцию $u(x,t)\in L_2(\Omega)$ назовем регулярным решением задачи A при $f\in L_2(\Omega)$, если существует последовательность $u_n\in V(\Omega),\ n\in N$ регулярных решений такая, что $\|u_n-u\|_{L_2(\Omega)}\to 0,\ \|Lu_n-f\|_{L_2(\Omega)}\to 0$ при $n\to\infty$.

Пространство функций, полученное замыканием множества $V(\Omega)$ по норме пространства $W_2^{6,2}(\Omega)$ обозначим через $\overset{o}{W}{}_2^{6,2}(\Omega)$.

Определение 3. Функцию $u\in\overset{o}{W}{}_2^{6,2}(\Omega)$ назовем решением почти всюду задачи при $f\in L_2(\Omega)$, если она почти всюду в области Ω удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3).

На множестве $V(\Omega)$ определим оператор L действующий из $V(\Omega)$ в $C(\Omega)$ по правилу

$$Lu=\left(\frac{\partial^6}{\partial x^6}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u,\quad u\in V(\Omega).$$

Регулярная разрешимость задачи эквивалентна разрешимости операторного уравнения

$$Lu=f. \qquad (4)$$

Замыкание оператора L в $L_2(\Omega)$ обозначим через $\overline{L}$.

2. Априорная оценка. Справедлива следующая

Лемма. Пусть $u(x,t)$ - регулярное решение задачи, $u_{xt},u_{xxt},u_{xxxt},u_{xxxxx},u_{xxxxxx}\in L_2(\Omega)$, $f\in C(\Omega)\cap L_2(\Omega)$. Тогда существует постоянное число $C>0$, зависящее только от размеров области Ω и не зависящее от функции $u(x,t)$ такое, что

$$\|u\|_{W_2^{6,2}(\Omega)}\le C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \qquad (5)$$

Лемма доказывается с использованием неравенств

$$2|ab|\le\varepsilon a^2+\varepsilon^{-1}b^2$$

и Коши – Буняковского.

Следствие. Регулярное решение задачи единственно и устойчиво, если оно существует.

3. Регулярная разрешимость. Имеет место

Теорема 1. Если $f(x,t)\in W(\Omega)$, то регулярное решение задачи существует.

Доказательство. Решение задачи удовлетворяющее условиям (2) ищем в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)X_n(x), \qquad (6)$$

где

$$X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\lambda_n x,\quad \lambda_n=\frac{n\pi}{p}. \qquad (7)$$

Подставляя (6) в (1) получим

$$u_n''(t)-\lambda_n^6u_n(t)=f_n(t),$$

решение которого удовлетворяющее условиям $u_n(0)=u_n(T)=0$ дается формулой

$$u_n(t)=-\frac{1}{\lambda_n^3}\int_0^T K_n(t,\tau)f_n(\tau)d\tau, \qquad (8)$$

где

$$f_n(\tau)=\int_0^p f(\xi,\tau)X_n(\xi)d\xi, \qquad (9)$$

$$K_n(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{sh\lambda_n^3\tau\cdot sh\lambda_n^3(T-t)}{sh\lambda_n^3T}, & 0\le\tau\le t,\\ \dfrac{sh\lambda_n^3t\cdot sh\lambda_n^3(T-\tau)}{sh\lambda_n^3T}, & t\le\tau\le T,\end{cases} \qquad (10)$$

$$K_n(t,\tau)=K_n(\tau,t)\le c_1\cdot e^{-\lambda_n^3|t-\tau|},\quad c_1=const>0. \qquad (11)$$

Решение задачи имеет вид (6), где $u_n(t)$ определяется формулой (8). Нам необходимо доказать абсолютную и равномерную сходимость следующих рядов

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)X_n(x), \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^6u}{\partial x^6}=-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^6u_n(t)X_n(x), \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^6u_n(t)X_n(x)+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x). \qquad (13)$$

Докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (12). Из него будет следовать абсолютная и равномерная сходимость рядов (6) и (13). Мажорантный ряд для (12) имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^6\,|u_n(t)|. \qquad (14)$$

Используя (11) и неравенство Коши-Буняковского получим

$$|u_n(t)|^2\le\frac{c_1^2}{\lambda_n^9}\,\|f_n\|_{L_2(0,T)}. \qquad (15)$$

Интегрируя (9) два раза по частям имеем

$$f_n(t)=-\frac{1}{\lambda_n^2}\,\overline{f}_n(t), \qquad (16)$$

где

$$\overline{f}_n(t)=\int_0^p\frac{\partial^2f}{\partial x^2}X_n(x)dx.$$

В силу того, что $\dfrac{\partial^2f}{\partial x^2}$ на $[0,p]$ удовлетворяет по x условию Гельдера с показателем $\delta>\dfrac{1}{2}$ равномерно по t, то [3]

$$|\overline{f}_n(t)|\le\frac{c_2}{\lambda_n^\delta},\quad c_2=const>0. \qquad (17)$$

Учитывая (15), (16), (17) из (14) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^6\,|u_n(t)|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_1c_2}{\lambda_n^{1/2+\delta}}<\infty, \qquad \text{т.к.} \qquad \frac{1}{2}+\delta>1.$$

Следовательно ряд (12), а также ряды (6), (13) сходится абсолютно и равномерно. Сравнивая (12) и (13) заключаем что решение (6) удовлетворяет уравнению (1). Выполнения условий (3) следует из (10). Теорема 1 доказана полностью.

3. Сильная разрешимость. Решение (6) перепишем в виде

$$u(x,t)=\int_0^T\int_0^p K(x,t;\xi,\tau)\,f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (18)$$

где

$$K(x,t;\xi,\tau)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^3}X_n(x)X_n(\xi)K_n(\xi,\tau). \qquad (19)$$

В силу оценки (11) ряд (19) сходится абсолютно и равномерно. Поэтому

$$|K(x,t;\xi,\tau)|\le c_3, \quad c_3=const>0. \qquad (20)$$

Справедлива

Теорема 2. Для любой $f\in L_2(\Omega)$ сильное решение задачи существует, единственно, устойчиво, удовлетворяет оценке (5), представимо в виде (18) и принадлежит классу $\overset{o}{W}{}_2^{6,2}(\Omega)\subset L_2(\Omega)$.

Доказательство. Множество $W(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$. Это следует из соотношения

$C_0^{\infty}(\Omega)\subset W(\Omega)\subset L_2(\Omega)$.

Тогда $\forall f\in L_2(\Omega)$ в $W(\Omega)$ найдется последовательность $\{f_k\}$, $k\in N$ такая, что $\| f_k-f\|_{L_2(\Omega)}\to 0$, $n\to\infty$. Поэтому $\{f_k\}$ фундаментальна в $L_2(\Omega)$, т.е..

$$\| f_k-f_m\|_{L_2(\Omega)}\to 0, \quad k,m\to\infty. \qquad (21)$$

В силу теоремы 1 для каждого $k\in N$ существует единственное регулярное решение

$$u_k(x,t)=\int_0^p\int_0^T K(x,t;\xi,\tau)\, f_k(\xi,\tau)d\tau d\xi, \quad k\in N, \qquad (22)$$

уравнения

$$Lu_k=f_k, \quad k\in N, \quad u_k\in V(\Omega), \quad f_k\in W(\Omega). \qquad (23)$$

В силу (5) и (21) имеем

$$\| u_k-u_m\|_{W_2^{6,2}(\Omega)}\le C\| f_k-f_m\|_{L_2(\Omega)}\to 0, \quad k,m\to\infty,$$

т.е. последовательность $\{u_k\}$ фундаментальна в $W_2^{6,2}(\Omega)$. В силу полноты $\overset{o}{W}{}_2^{6,2}(\Omega)$ последовательность $\{u_k\}$, $k\in N$ имеет предел. Обозначим его через $u(x,t)$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty}u_k(x,t)=u(x,t)\in\overset{o}{W}{}_2^{6,2}(\Omega).$$

Этот предел и будет сильным решением задачи и его можно получить переходя к пределу при $k\to\infty$ в (22)

$$u(x,t)=\int_0^T\int_0^p K(x,t;\xi,\tau)\, f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

где

$$u(x,t)\in\overset{o}{W}{}_2^{6,2}(\Omega), \quad f(\xi,\tau)\in L_2(\Omega).$$

Из неравенства

$$\| u_k\|_{W_2^{6,2}(\Omega)}\le C\| f_k\|_{L_2(\Omega)}$$

при $k\to\infty$ имеем

$$\| u\|_{W_2^{6,2}(\Omega)}\le C\| f\|_{L_2(\Omega)}, \quad u\in W_2^{6,2}(\Omega), \quad f\in L_2(\Omega). \qquad (24)$$

Из (24) следует единственность и устойчивость сильного решения. Теорема 2 доказана полностью.

Следствие 1. Сильное решение является решением почти всюду в Ω задачи. В самом деле, т.к. сильное решение $u(x,t)\in\overset{o}{W}{}_2^{6,2}(\Omega)$, то переходя к пределу в (23) при $k\to\infty$ имеем

$$Lu=f, \quad u\in\overset{o}{W}{}_2^{6,2}(\Omega), \quad f\in L_2(\Omega),$$

т.е. $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду и условия (2), (3) выполняются в смысле $L_2(\partial\Omega)$.

4. Спектр задачи. Из формулы (18) и оценки (20) следует, что на множестве $W(\Omega)$ определен ограниченной линейный оператор L^{-1} обратной оператору L. Оператор L^{-1} действует из $W(\Omega)$ в $V(\Omega)$ по правилу

$$\left(L^{-1}f\right)(x,t)=\int_0^T\int_0^p K(x,t;\xi,\tau)\,f(\xi,\tau)d\xi d\tau .$$

Поскольку $W(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то оператор L^{-1} можно продолжить по непрерывности на все пространство $L_2(\Omega)$. И это продолжение, которое мы обозначим через $\bar{L}^{-1}$, является замыканием оператора L^{-1}. Оператор L определен на плотном в $L_2(\Omega)$ множестве $V(\Omega)$, поэтому $\bar{L}^{-1}$, в силу оценки (5) является обратном к замыканию $\bar{L}$ оператора L [4]. $D(\bar{L})$ состоит из всех сильных решений задачи. Справедлива

Теорема 3. Оператор $\bar{L}^{-1}$ является вполне непрерывным в $L_2(\Omega)$ и самосопряженным. Его спектр состоит только из действительных собственных значений конечной кратности.

Доказательство. Из оценки (20) следует, что $K(x,t;\xi,\tau)\in L_2(\Omega\times\Omega)$, следовательно, L^{-1} есть оператор Гильберта-Шмидта и потому он вполне непрерывен в $L_2(\Omega)$. Из (10) заключаем, что $K(x,t;\xi,\tau)$ - симметрический, ограничен и определен во всем $L_2(\Omega)$ и потому он самосопряженный. Тогда спектр оператора L^{-1}, а следовательно и оператора $\bar{L}$ [5], как известно расположен на действительной оси комплексной λ - плоскости, и состоит из собственных значений конечной кратности. Под спектром задачи понимается множество собственных значений оператора $\bar{L}$. Связь собственных значений операторов $\bar{L}$ и $\bar{L}^{-1}$ такова [5]: если $\mu_n\neq 0$ собственное значение оператора $\bar{L}^{-1}$, то число $\lambda_n=\mu_n^{-1}$ есть собственное число оператора $\bar{L}$. Теорема 3 доказана полностью.

Следствие 2. Задача – самосопряженная.

Литература:

1. Джураев Т.Д. Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. –Ташкент: Фан. 1986. -220 с.
2. Джураев Т.Д. Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. –Ташкент: Фан. 2000. -144 с.
3. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. М., Наука, 1980, 208 с.Зигмуид А. Тригонометрические ряды. –М., 1966. -672 с.
4. Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент. Гылым. 1993. 328 с.