УДК 517.95

Д. Аманов – к.ф.-м.н., с.н.с. АН РУз
D.Amanov – c.ph.-m.s., senior researcher AS RUz

К ПОСТАНОВКЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЧЁТНОГО ПОРЯДКА

В работе устанавливается корректность краевых задач в зависимости от числа k.

Ключевые слова: уравнения четвертого порядка, краевые задачи, заданная функция, задача Коши.

TO THE FORMULATION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR EQUATIONS OF EVEN ORDER

The work establishes the correctness of boundary value problems as a function of number.

Keywords: fourth-order equations, boundary value problems, a given function, the task of the Cauchy.

1. Постановка задач. В области $\Omega=\{(x,t):0<x<p,\ 0<t<T\}$ рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f(x,t), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f(x,t), \qquad (2)$$

где $k=0,1,2...,\ f(x,t)-$заданная функция.

Задача Коши для уравнения высокого порядка изучена многими авторами (см. например [1] и библиографию в этой работе).

Поэтому мы будем исследовать краевые задачи для уравнений (1) и (2). Краевые задачи для уравнений (1) и (2) изучены в работах [2]-[5].

Приведём краевые условия, которые будут использованы при постановке краевых задач. Ограничимся следующими краевыми условиями

$$\frac{\partial^{2m}u(0,t)}{\partial x^{2m}}=\frac{\partial^{2m}u(p,t)}{\partial x^{2m}}=0,\quad m=0,1...,k-1,\quad 0\le t\le T, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^{2m+1}u(0,t)}{\partial x^{2m+1}}=\frac{\partial^{2m+1}u(p,t)}{\partial x^{2m+1}}=0,\quad m=0,1...,k-1,\quad 0\le t\le T, \qquad (4)$$

$$u(x,0)=u(x,T)=0,\quad 0\le x\le p, \qquad (5)$$

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le p. \qquad (6)$$

При постановке краевых задач задание условия (5) или (6) зависит от чётности или нечётности числа k. Для уравнения (1) берётся условие (5), если число $k-$чётное и условие (6), если $k-$нечётное. При этом при чётном k для решения задачи получается априорная оценка из пространства $W_2^{2k,2}(\Omega)$, а в случае нечётного k для решения задачи получается априорная оценка из $W_2^{k,1}(\Omega)$. Аналогичная ситуация наблюдается при изучении краевых задач для уравнения (2) с тем отличием, что при k чётном для решения задачи получается априорная оценка из $W_2^{k,1}(\Omega)$, а при нечётном $k-$из $W_2^{2k,2}(\Omega)$. Это показывает, что при чётном k уравнение (1), а при нечётном k уравнение (2) является гипоэллиптическим.

Если всё же для уравнения (1) рассмотреть краевую задачу при нечётном k с условием (5) и одним из условий (3) или (4), то возникает условие на размеры области (условие разрешимости) и для решения не удаётся получить какую-либо априорную оценку. Если для уравнения (1) при чётном k рассмотреть краевую задачу с условием (6) и одним из условий (3) или (4), то решение задачи становится неограниченным. В этой работе мы исследуем краевые задачи для уравнения (1), для уравнения (2) краевые задачи исследуются аналогично.

Пусть k – чётное число. В этом случае корректны следующие задачи.

Задача 1. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющая условиям (3) и (5).

Задача 2. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3) и (6).

Следующая задача некорректна.

Задача 3. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3) и (6).

Пусть k – нечётное число. В этом случае корректны следующие задачи.

Задача 4. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3) и (6).

Задача 5. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3) и (5).

Следующая задача условно разрешима.

Задача 6. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3) и (5).

Во всех этих задачах вместо условия (3) можно взять условие (4), при этом всё сказанное о разрешимости этих задач остаётся в силе.

Приведём исследования задач 1и 6.

2. Исследование задач 1 и 6. Исследование задач 1и 6 проведём параллельно.

Введём обозначения

$$V(\Omega)=\{u:u\in C_{x,t}^{2k-2,0}\left(\overline{\Omega}\right)\cap C_{x,t}^{2k,2}(\Omega),\ \text{справедливы (2),(3),}\}$$

$$W_1(\Omega)=\left\{f:f\in C_{x,t}^{1,0}\left(\overline{\Omega}\right),\ f(0,t)=f(p,t)=0,\frac{\partial f}{\partial x}\in Lip_{\alpha}[0,p],0<\alpha\le 1\right\},$$

$$W_2(\Omega)=\left\{f:f\in C_{x,t}^{k,0}\left(\overline{\Omega}\right),\frac{\partial^{k+1}f}{\partial x^{k+1}}\in L_2(\Omega),\frac{\partial^{2m}f}{\partial x^{2m}}=0\text{ï ðè }x=0;\ p,\ m=0,1,...,\frac{k-1}{2}\right\}.$$

На множестве $V(\Omega)$ определим оператор L действующий из $V(\Omega)$ в $C(\Omega)$ по правилу

$$Lu\equiv\left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u.$$

Замыкание оператора L в $L_2(\Omega)$ обозначим через $\overline{L}$.

Определение 1. Функцию $u(x,t)\in V(\Omega)$ назовём регулярным решением задачи 1 при $f(x,t)\in C(\Omega)$, если она в области Ω удовлетворяет уравнению (1).

Определение 2. Функция $u(x,t)\in L_2(\Omega)$ называется сильным решением задачи 1 при $f(x,t)\in L_2(\Omega)$, если существует последовательность $u_n\in V(\Omega)$, $n\in N$, такая, что $\|u_n-u\|_{L_2(\Omega)}\to 0,\ \|Lu_n-f_n\|_{L_2(\Omega)}\to 0$ при $n\to\infty$.

Замыкание множества $V(\Omega)$ по норме

$$\|u\|^2_{W_2^{2k,2}(\Omega)} = \iint\limits_{\Omega}\left[\sum_{m=0}^{2k}\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2 + \sum_{m=1}^{2}\left(\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right)^2 + \sum_{m=2}^{k+1}\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-1}\partial t}\right)^2\right]dxdt$$

обозначим через $\overset{0}{W}{}_2^{2k,2}(\Omega)$, а по норме $\|u\|^2_{W_2^{k,1}(\Omega)} = \iint\limits_{\Omega}\left[\sum_{m=0}^{k}\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dxdt -$ через $\overset{0}{W}{}_2^{k,1}(\Omega)$.

Ясно, что $\overset{0}{W}{}_2^{2k,2}(\Omega) \subset W_2^{2k,2}(\Omega)$, $\overset{0}{W}{}_2^{k,1}(\Omega) \subset W_2^{k,1}(\Omega)$.

Определение 3. Функцию $u(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^{2k,2}(\Omega)$ назовём решением почти всюду задачи 1 при $f(x,t) \in L_2(\Omega)$, если она почти всюду в области Ω удовлетворяет уравнению (1) и условиям (3), (6).

3. Априорная оценка. Справедлива следующая

Лемма 1. Пусть $u(x,t)$ – регулярное решение задачи 1, имеет непрерывные производные $\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x^m \partial t}, \frac{\partial^{2k-1}u}{\partial x^{2k-1}}, \frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial u}{\partial t}, m = 1,2,...,k$ принадлежащие $L_2(\Omega)$, $f \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega)$. Тогда существует постоянное число $C > 0$ зависящее от размеров области и числа k и не зависящее от функции $u(x,t)$ такое, что имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^{2k,2}(\Omega)} \le C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \qquad (7)$$

При доказательстве леммы мы используем методику работы [6], неравенства $2|ab| \le \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1}b^2$ и Коши-Буняковского.

Следствие. Решение задачи 1 единственно и устойчиво, если оно существует.

4. Регулярная разрешимость задач 1 и 6. Имеет место

Теорема 1. Пусть $f(x,t) \in W_1(\Omega)$, в случае задачи 1, и $f(x,t) \in W_2(\Omega)$, в случае задачи 6 и числа p, T – такие, что

$$\left|\sin\left(\frac{n\pi}{p}\right)^k T\right| \ge \delta > 0, \quad \forall n \in N. \qquad (8)$$

Тогда существуют регулярные решения задач 1 и 6.

Замечание. Множество чисел p и T, удовлетворяющих условию (8) не пусто.

Используя метод разделения переменных получаем решения задач 1 и 6 в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot \frac{1}{\lambda_n^k}\int_0^T K_n^{(1)}(t,\tau) f_n(\tau)\,d\tau, \qquad (9)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot \frac{1}{\lambda_n^k}\int_0^T K_n^{(6)}(t,\tau) f_n(\tau)\,d\tau \qquad (10)$$

соответственно. Здесь

$$K_n^{(1)}(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{sh\lambda_n^k \tau \cdot sh\lambda_n^k (T-t)}{sh\lambda_n^k T}, & 0 \le \tau \le t, \\ \dfrac{sh\lambda_n^k t \cdot sh\lambda_n^k (T-\tau)}{sh\lambda_n^k T}, & t \le \tau \le T, \end{cases}$$

$$K_n^{(6)}(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\sin\lambda_n^k\tau\cdot\sin\lambda_n^k(T-t)}{\sin\lambda_n^k T}, & 0\le\tau\le t,\\ \dfrac{\sin\lambda_n^k t\cdot\sin\lambda_n^k(T-\tau)}{\sin\lambda_n^k T}, & t\le\tau\le T,\end{cases}$$

причём $K_n^{(i)}(t,\tau)=K_n^{(i)}(\tau,t),\ i=1,6,$

$$K_n^{(1)}(t,\tau)\le C_0\cdot e^{-\lambda_n^k|t-\tau|}, C_0=\text{const}>0, \qquad (11)$$

$$\left|K_n^{(6)}(t,\tau)\right|\le\frac{1}{\delta},\ \lambda_n=\frac{n\pi}{p},$$

$$X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\lambda_n x,\ f_n(t)=\int_0^p f(x,t)X_n(x)dx.$$

Если выполняются условия теоремы 1, то решения (9), (10) и их производные $\dfrac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}},\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ сходятся абсолютно и равномерно.

5. Сильная разрешимость задачи 1.

Теорема 2. Для $\forall f\in L_2(\Omega)$ сильное решение задачи 1 существует, единственно, устойчиво и удовлетворяет оценке (7).

Доказательство основано на существовании последовательности регулярных решений $u_n(x,t)\in V(\Omega)$, её фундаментальности в норме $W_2^{2k,2}(\Omega)$ и полноте пространства $\overset{0}{W}{}_2^{2k,2}(\Omega)$. Отсюда следует, что сильное решение задачи 1 является также решением почти всюду.

6. Спектр задачи 1. Решение (9) представим в виде

$$u(x,t)=\int_0^p\int_0^T K(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (12)$$

где

$$K(x,t;\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)\cdot X_n(\xi)}{\lambda_n^k}K_n^{(1)}(t,\tau). \qquad (13)$$

В силу оценки (11) ряд (13) сходится абсолютно и равномерно. Поэтому

$$\left|K(x,t:\xi,\tau)\right|\le C_1,\quad C_1=\text{const}>0. \qquad (14)$$

Из (12) следует, что на множестве $W_1(\Omega)$ определён линейный оператор L^{-1} обратный оператору L и действующий из $W_1(\Omega)$ в $V(\Omega)$. Он симметрический и ограничен в силу (14). Множество $W_1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$. Тогда оператор L^{-1} можно по непрерывности продолжить на всё пространство $L_2(\Omega)$. И это продолжение, которое мы обозначим через $\overline{L^{-1}}$ является его замыканием.

$\overline{L^{-1}}$ определён на всём пространстве, ограничен и симметрический и поэтому он самосопряжённый. В силу (14) $\overline{L^{-1}}$ вполне непрерывный. Поэтому спектр $\overline{L^{-1}}$ состоит из действительных собственных значений конечной кратности.

Оператор $\overline{L^{-1}}$ является обратным оператору $\overline{L}$. Следовательно спектр оператора $\overline{L}$ также дискретен и состоит из действительных собственных значений конечной кратности. Поэтому задача 1 имеет дискретный спектр.

Для решения задачи 6 не удаётся получить какую-либо априорную оценку. Поэтому мы вынуждены оценить решение (10) и его производные. При этом для решения (10) получается оценка

$$\|u\|_{W_2^{k,1}(\Omega)} \le C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \qquad (14)$$

Используя (14) можно построить сильное решение задачи 6 и исследовать спектр задачи как и выше. Но сильное решение уже не является решением почти всюду. Это видно из оценки (14).

Рассмотрим случай $k=0$. В этом случае задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода с параметром

$$u(x,t)+\int_0^T K(t,\tau)u(x,\tau)d\tau=\int_0^T K(t,\tau)\,f(x,\tau)d\tau, \qquad (15)$$

где

$$K(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\tau(T-t)}{T}, & 0\le\tau\le t,\\ \dfrac{t(T-\tau)}{T}, & t\le\tau\le T.\end{cases}$$

Решение задачи удовлетворяет априорной оценке

$$\|u\|_{W_2^{0,2}(\Omega)} \le C\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Из этой оценки следует единственность и существования решения (15).

Литература:

1. Аманов Д., Юлдашева А.В. Обратная задача для уравнения чётного порядка. Материалы республиканской научной конференции «Современные проблемы математики, механики и информационных технологий» посвящённой 90-летнему юбилею Национального университета Узбекистана. 8 мая, 2008г. Ташкент. 2008. с. 30-31.
2. Аманов Д., Юлдашева А.В. разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнения чётного порядка. Международный Российско - Азербаджанский симпозиум « Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Материалы Эльбрус, 12-17 мая 2008г. Стр. 28-30.
3. Аманов Д., Отарова Ж.А. Краевая задача для уравнения смешанного типа четвёртого порядка. Узбекский математический журнал. 2008, №3. стр. 13-22.
4. Аманов Д. Разрешимость и спектральные свойства самосопряжённой задачи для уравнения четвёртого порядка. Узбекский математический журнал. 2005.№3. стр. 72-77.
5. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. УМН, Т.17, вып. 3 (105). 1962, 3-146.
6. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М. Мир, 1977. 504 с.