УДК.517.953.5

Б.Ю.Иргашев – преп. НамИПИ
B. Yu. Irgashev – teacher NamEPI

# ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

*В статье для уравнения* $U_{xxx} - y^m U_{yy} = 0 \left(0 \le m < 2\right)$, *с помощью вырожденных гипергеометрических функций построены автомодельные решения, а также изучены некоторые свойства этих решений.*

*Ключевые слова: уравнения третьего порядка, гипергеометрические функции, переменные, решения.*

# ON SELF-SIMILAR SOLUTIONS OF A DEGENERATE THIRD-ORDER EQUATION

*In the paper, self-similar solutions are constructed for the equation with the aid of degenerate hyper geometric functions, and certain properties of these solutions are also studied.*

*Keywords: third-order equations, hyper geometric functions, variables, solutions.*

Рассмотрим для уравнения

$$U_{xxx} - y^m U_{yy} = 0, \quad 0 \le m < 2 \qquad (1)$$

следующую задачу при $y > 0$

Задача1. Найти решение уравнения (1),удовлетворяющее условию

$$\lim_{y \to +0} U(x, y) = \begin{cases} 1, \; при \; x \ge 0 \\ 0, при \; x < 0 \end{cases}$$

Решение: введем новую переменную $t = xy^{\alpha}$, где $\alpha = \dfrac{m-2}{3}$, ($\alpha$ называется показателем автомодельности) тогда получим следующую задачу

$$\begin{cases} U'''(t) - \alpha^2 t^2 U''(t) - \alpha(\alpha - 1) t U'(t) = 0 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} U(t) = 1, \quad \lim\limits_{t \to -\infty} U(t) = 0 \end{cases}$$

(2)

Пусть $\varphi(t) = U'(t)$, тогда $U(t) = c \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi(t)\, d\tau$, где $c - const$,выберим $c$ так, чтобы выполнялось граничное условие, тогда

$$c = \left[ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) d\tau \right]^{-1}$$

имеем уравнение

$$\varphi''\left(t\right) - \alpha^2 t^2 \varphi'(t) - \alpha(\alpha - 1) t \varphi(t) = 0$$

(3)

Будем искать решение уравнения (3) в виде

$$\varphi(t) = tZ(\xi)$$

где

$$\xi = \frac{(2-m)^2 t^3}{27}$$

тогда получим следующее уравнение

$$\xi Z''(\xi) + \left(\frac{4}{3} - \xi\right) Z' - \frac{7-2m}{3(2-m)} Z = 0 \qquad (4)$$

Это вырожденное гипергеометрическое уравнение, общее решение которого имеет вид

$$Z(\xi) = c_1 \Phi\left(\frac{7-2m}{3(2-m)}, \frac{4}{3}, \xi\right) + c_2 \Psi\left(\frac{7-2m}{3(2-m)}, \frac{4}{3}, \xi\right), \text{ где}$$

$$\Phi(a,c,x) = 1 + \frac{ax}{c1!} + \frac{a(a+1)x^2}{c(c+1)2!} + \ldots + \frac{(a_n)x^n}{(c_n)n!} + \ldots$$

$$\Psi(a,c,x) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)} \Phi(a,c,x) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} x^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c, x)$$

$$(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1), \quad (a)_0 = 1 .$$

Возвращаясь к старым переменным получим выражения для $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$$

где

$$\varphi_1(t) = t\Phi\left(\frac{7-2m}{3(2-m)}, \frac{4}{3}, \frac{(2-m)^2}{27} t^3\right)$$

$$\varphi_2(t) = t\Psi\left(\frac{7-2m}{3(2-m)}, \frac{4}{3}, \frac{(2-m)^2}{27} t^3\right).$$

Т.к. $\varphi_1(t) \in L(-\infty, 0), \varphi_2(t) \in L(-\infty, +\infty)$, то $c_1 = 0$, найдем $c_2$ из условия

$$c_2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\tau)\, d\tau\right]^{-1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{0} \varphi_2(\tau) d\tau + \int_{0}^{+\infty} \varphi_2(\tau) d\tau = I_1 + I_2$$

делая замену переменных $\xi = \dfrac{(2-m)^2 \tau^3}{27}$ в интеграле $I_2$, получим

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \tau\Psi\left(\frac{7-2m}{3(2-m)}, \frac{4}{3}, \frac{(2-m)^2 \tau^3}{27}\right) d\tau = \frac{6\pi}{\sqrt{3}\sqrt[3]{(2-m)^4}} \frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2-m}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{7-2m}{3(2-m)}\right)\Gamma\left(\dfrac{5-m}{3(2-m)}\right)} = \beta$$

Теперь учитывая соотношение

$$\tau\Psi\left(\frac{7-2m}{3(2-m)}, \frac{4}{3}, \frac{(2-m)^2 \tau^3}{27}\right) = \frac{\Gamma\left(-\dfrac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{5-m}{3(2-m)}\right)} \tau\Phi\left(\frac{7-2m}{3(2-m)}, \frac{4}{3}, \frac{(2-m)^2 \tau^3}{27}\right) +$$

$$+\frac{3}{\sqrt[3]{(2-m)^2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{7-2m}{3(2-m)}\right)}\Phi\left(\frac{5-m}{3(2-m)},\frac{2}{3},\frac{(2-m)^2\tau^3}{27}\right)$$

и делая в интеграле $I_1$ замену $\tau=-t$, получим

$$I_1=\frac{-\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-m}{3(2-m)}\right)}\int_0^{+\infty}t\Phi\left(\frac{7-2m}{3(2-m)},\frac{4}{3},-\frac{(2-m)^2t^3}{27}\right)dt+$$

$$+\frac{3}{\sqrt[3]{(2-m)^2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{7-2m}{3(2-m)}\right)}\int_0^{+\infty}\Phi\left(\frac{5-m}{3(2-m)},\frac{2}{3},-\frac{(2-m)^2t^3}{27}\right)dt=J_1+J_2$$

сделав в интегралах $J_1,J_2$ замену переменных $\xi=\frac{(2-m)^2t^3}{27}$, получим

$$J_1=J_2=\beta$$

значит $I_1=2\beta, I_2=\beta$ отсюда $c_2=\frac{1}{3\beta}$. Итак решение задачи 1 имеет вид

$$U(x,y)=\frac{1}{3\beta}\int_{-\infty}^{t}\varphi_2(\tau)d\tau$$

где

$$\varphi_2(t)=t\Psi\left(\frac{7-2m}{3(2-m)},\frac{4}{3},\frac{(2-m)^2}{27}t^3\right)$$

пусть

$$F\left(\frac{x}{y^{\frac{2-m}{3}}}\right)=\frac{1}{3\beta}\int_{-\infty}^{\frac{x}{y^{\frac{2-m}{3}}}}\varphi_2(\tau)d\tau$$

тогда

$$U(x,y)=F\left(\frac{x}{y^{\frac{2-m}{3}}}\right).$$

Если в задаче 1 начальное условие имеет вид

$$\lim_{y\to+0}U(x,y)=\begin{cases}1, \text{ при } x\ge x_1\\ 0, \text{ при } x<x_1\end{cases}$$

то решение имеет вид

$$U(x,y)=F\left(\frac{x-x_1}{y^{\frac{2-m}{3}}}\right)$$

Пусть в задаче 1 начальное условие задается в виде

$$\lim_{y\to+0} U(x,y) = \begin{cases} 0, \ при\, x < x_1 \\ 1, \ при \ x_1 \le x \le x_2 \\ 0, \ при\, x > x_2 \end{cases}$$

тогда решение имеет вид

$$U(x,y) = F\left(\frac{x-x_1}{y^{\frac{2-m}{3}}}\right) - F\left(\frac{x-x_2}{y^{\frac{2-m}{3}}}\right) \qquad (5)$$

решение (5) можно записать в виде

$$U(x,y) = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial\xi} F\left(\frac{x-\xi}{y^{\frac{2-m}{3}}}\right) d\xi .$$

Пусть

$$U^*(x,y,\xi) = -\frac{\partial}{\partial\xi} F\left(\frac{x-\xi}{y^{\frac{2-m}{3}}}\right) = \frac{1}{3\beta}\frac{1}{y^{\frac{2-m}{3}}}\varphi_2\left(\frac{x-\xi}{y^{\frac{2-m}{3}}}\right)$$

или

$$U^*(x,y,\xi) = \frac{1}{y^{\frac{2-m}{3}}} f\left(\frac{x-\xi}{y^{\frac{2-m}{3}}}\right)$$

где

$$f(t) = \frac{1}{3\beta} t\Psi\left(\frac{7-2m}{3(2-m)}, \frac{4}{3}, \frac{(2-m)^2}{27}t^3\right)$$

при таком обозначении решение задачи 1 запишется в виде

$$U(x,y) = \int_{x_1}^{x_2} U^*(x,y,\xi)d\xi, \ -\infty < \frac{x-\xi}{y^{\frac{2-m}{3}}} < +\infty .$$

Для функции $f(t)$ имеет место следующии соотношения

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{3}, \ \int_{-\infty}^{0} f(t)dt = \frac{2}{3}, \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

2.Теперь займемся решением уравнения (4) принадлежащее классу $L(-\infty,0)$. Имеем

$$\varphi_1(t) = t\Phi\left(\frac{7-2m}{3(2-m)}, \frac{4}{3}, \frac{(2-m)^2}{27}t^3\right)$$

$$U(x,y) = c_1 \int_{-\infty}^{t} \varphi_1(\tau)d\tau ,$$

где $c_1$-некоторая постоянная.Эта функция непрерывна и ограниченна при $x \le 0$, удовлетворяет уравнению (1) и условию

$U(0,y) = 1, \ U(x,0) = 0$.

Имеем

$$c_1^{-1} = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt[3]{(2-m)^4}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2-m}\right)}{\Gamma\left(\frac{7-2m}{3(2-m)}\right)} = \gamma$$

отсюда

$$U(x,y) = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\frac{x}{y^{\frac{2-m}{3}}}} \varphi_1(\tau) d\tau = -\frac{1}{\gamma} \frac{1}{y^{\frac{2-m}{3}}} \int_{-\infty}^{0} \varphi_1\left(\frac{-|x-\xi|}{y^{\frac{2-m}{3}}}\right) d\xi .$$

Если функция $U(x,y)$ рассматривается при $x \le x_1 < 0$, то

$$U(x,y) = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\frac{x-x_1}{y^{\frac{2-m}{3}}}} \varphi_1(\tau) d\tau$$

эту функцию можно записать в виде

$$U(x,y) = -\frac{1}{\gamma} \frac{1}{y^{\frac{2-m}{3}}} \int_{-\infty}^{x_1} \varphi_1\left(\frac{-|x-\xi|}{y^{\frac{2-m}{3}}}\right) d\xi = \int_{-\infty}^{x_1} V^*(x,y,\xi) d\xi ,$$

где

$$V^*(x,y,\xi) = -\frac{1}{y^{\frac{2-m}{3}}} \varphi(t)$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\gamma} t \Phi\left(\frac{7-2m}{3(2-m)}, \frac{4}{3}, \frac{(2-m)^2}{27} t^3\right).$$

Справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{0} \varphi(\tau) d\tau = 1$$

**Лемма**. Для произвольной функции $\varphi(x) \in C[0,1]$, функция

$$u(x,y) = \int_0^1 U^*(x,y,\xi) \varphi(\xi) d\xi$$

удовлетворяет уравнению (1) в области $\{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ и условию

$$\lim_{y \to +0} u(x,y) = \varphi(x)$$

**Доказательство.** Т.к. функция $U^*(x,y,\xi)$ удовлетворяет уравнению (1), то очевидно $u(x,y)$ тоже удовлетворяет уравнению (1).Докажем предельное соотношение

$$\int_0^1 U^*(x,y,\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int_0^1 \frac{1}{y^{\frac{2-m}{3}}} f\left(\frac{x-\xi}{y^{\frac{2-m}{3}}}\right) \varphi(\xi) d\xi$$

сделаем замену переменных в интеграле

$$t = \frac{x-\xi}{y^{\frac{2-m}{3}}}, \ \xi = x - ty^{\frac{2-m}{3}}, \ d\xi = -y^{\frac{2-m}{3}} dt,$$

тогда имеем

$$\lim_{y\to+0} u(x,y) = \lim_{y\to+0} \int\limits_{\frac{x-1}{y^{\frac{2-m}{3}}}}^{\frac{x}{y^{\frac{2-m}{3}}}} f(t)\varphi\left(x - ty^{\frac{2-m}{3}}\right)dt = \varphi(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \varphi(x).$$

Литература:


1. Джураев Т.Д Апаков.Ю.П. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Вестник Самарского государственного технического университета,Серия «Физико-математические науки», № 2(15),2007г.18-26 стр.