УДК 517.956

Н.К. Мамадалиев – N.K. Mamadaliev -

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО - ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В данной работе рассматривается задача Геллерстедта для уравнения

Ключевые слова: уравнения параболо-гиперболического типа, задача, интервал, линия, функция.

ANALOG OF THE GELLERSTEDT PROBLEM FOR A MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION

In this paper was considered the Gellerstedt task for equation

Keywords: equations of parabolic-hyperbolic type, task, interval, line, function.

$$0=\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial\ u}{\partial y}+a(x,y)u;\ y\ge 0,\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\dfrac{\partial u}{\partial y};\ y<0,\end{cases}\qquad (1)$$

в области $D=D_1\cup D_2^*\cup AB.$

Здесь область D_1 ограничена отрезками AB, BB_0, A_0B_0 , AA_0 прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$, $x=0$, соответственно, а область D_2^* – при $y<0$ характеристиками уравнения (1) $AC_1: x-2\sqrt{-y}=0$, $EC_1: x+2\sqrt{-y}=x_0$, $EC_2: x-2\sqrt{-y}=x_0$, $BC_2: x+2\sqrt{-y}=1$ и $AB: y=0$, где x_0 – фиксированная точка из интервала (0,1).

В уравнении (1) $a(x,y)$ – заданная функция, причем $a(x,y)\in C^{(0,h)}\left(\overline{D}_1\right)$, $0<h<1$, $\alpha=-n+\alpha_0$, в котором $0<\alpha_0<1/2$ или $1/2<\alpha_0<1$, а $n=1,2,3,\ldots$ Эта задача с обычными условиями склеивания решения на линии вырождения, вообще говоря, оказывается некорректной. Здесь эти условия заменяются несколько иными, зависящими от α.

Пусть D_{21} и D_{22} – части области D_2^* с границами AC_1EA и EC_2BE, соответственно.

Задача Геллерстедта. *Требуется определить в области D функцию u(x,y) со следующими свойствами:*

а) $u(x,y)\in C\left(\overline{D}\right)$;

б) $u(x,y)$ *является регулярным решением уравнения (1) в области* D_1 *и обобщенным решением класса R в области* D_2^* *(определение класса R ниже);*

в) на линии вырождения выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{-\alpha}\left[u-A_n^-(\tau)\right]_y=\lim_{y\to +0}\frac{\partial u}{\partial y};\qquad (2)$$

г) удовлетворяет граничным условиям

$$u\big|_{AA_0} = \varphi_0(y), \qquad u\big|_{BB_0} = \varphi_1(y), \qquad 0 \le y \le 1, \tag{3}$$

$$u\big|_{EC_1} = \psi_1(x), \qquad x_0/2 \le x \le x_0, \tag{4}$$

$$u\big|_{EC_2} = \psi_2(x), \qquad x_0 \le x \le (1+x_0)/2, \tag{5}$$

где $u(x,0) = \tau(x)$, $0 \le x \le 1$,

$$A_n^-(\tau) = \gamma_1 \sum_{k=0}^{n} N_k(\alpha,n,\delta)(-y)^k \int_0^1 \tau^{2k}(\lambda)\left[t(1-t)\right]^{k+\delta} dt, \tag{6}$$

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2+2\delta)}{\Gamma^2(1+\alpha)}, \qquad \lambda = x - 2\sqrt{-y}(1-2t), \qquad \beta = \alpha - 1/2,$$

$$\mathrm{N_k}(\alpha,n,\delta) = \frac{2^{2k} C_n^k \Gamma(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta+k)\prod_{s=0}^{k-1}(\alpha+s)}, \qquad \delta = \alpha + n - 3/2,$$

$\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ – *заданные функции, причем* $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$, $\psi_1^{(i)}(x)$, $\psi_2^{(i)}(x)$, $i = \overline{1,n+2}$, *непрерывны и* $\psi_j(x_0) = \psi_j^{(k)}(x_0) = 0$, $\mathrm{k} = \overline{1,\mathrm{n}}$, $\mathrm{j} = 1,2$; $\psi_j^{(n+1)}(x) = (x-x_0)^{1-2\beta-n}\overline{\psi}(x)$, $\mathrm{j} = 1,2$; $\overline{\psi}(x)$ - *известная непрерывная функция и* $\overline{\psi}(x_0) \ne 0$.

Рассмотрим уравнение (1) *(y<0)* в характеристическом треугольнике D_2, ограниченном характеристиками $AC: x - 2\sqrt{-y} = 0$, $BC: x + 2\sqrt{-y} = 1$, $AB: y = 0$.

Непрерывное решение видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) в области D_2 для $\alpha<0$ с начальными данными

$$u_\alpha(x,0) = \tau(x), \tag{7}$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^\alpha \left[u_\alpha - A_n^-(\tau)\right]_y' = (-1)^n \nu(x), \tag{8}$$

в характеристических переменных $\xi = x - 2\sqrt{-y}$, $\eta = x + 2\sqrt{-y}$ имеет вид ([1])

$$u_\alpha(\xi,\eta) = \gamma_1 \sum_{k=0}^{n} N_k(\alpha,n,\delta)(\eta-\xi)^{-2\delta-1} 4^{-2k} \int_\xi^\eta \tau^{(2k)}(\lambda)(\lambda-\xi)^{k+\delta} \cdot$$

$$\cdot (\eta-\lambda)^{k+\delta} d\lambda - (-1)^n \gamma_2 4^{2(\alpha-1)} \int_\xi^\eta \nu(\lambda)(\lambda-\xi)^{1/2-\alpha}(\eta-\lambda)^{1/2-\alpha} d\lambda \equiv$$

$$\equiv A_n^-(\tau) - (-1)^n \gamma_2 4^{2(\alpha-1)} \int_\xi^\eta \nu(\lambda)(\lambda-\xi)^{1/2-\alpha}(\eta-\lambda)^{1/2-\alpha} d\lambda, \tag{9}$$

где

$$\gamma_2 = \frac{\Gamma(1-2\alpha)}{(1-\alpha)\Gamma^2(1/2-\alpha)}.$$

Определение [2]. Функция *u(ξ,η)*, определенная формулой (9), называется *обобщенным решением уравнения (1) класса R в области* D_2^*, если $\nu(t) \in C[0,1]$ и функция $\tau(x)$ представима в виде

$$\tau(x) = \begin{cases} \int\limits_{x}^{x_0} (t-x)^{-2\beta} T(t)dt, & 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{x}_0, \\ \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^{-2\beta} T(t)dt, & \mathrm{x}_0 \le \mathrm{x} \le 1, \end{cases}$$

(10)

причем *T(t)* – некоторая непрерывная на $[0, x_0] \cup [x_0, 1]$ функция.

Отметим, что представления обобщенного решения класса *R* (11), (12) при *n = 0* доказаны М.М. Смирновым, а для вышеуказанных значений α впервые получены автором.

В настоящей работе с помощью полученных представлений обобщенного решения класса *R* для уравнения (1) гиперболической области доказана однозначная разрешимость сформулированной задачи Геллерстедта.

Для этого, подставив (10) в решение видоизмененной задачи Коши (9) в области $\overline{D}_{21} = \{(\xi,\eta) : 0 \le \xi \le \eta, 0 \le \eta \le \mathrm{x}_0\}$ и учитывая тождества [3]

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(2\delta+2)\Gamma^2(k+\delta+1)}{\Gamma^2(\delta+1)\Gamma(2k+2\delta+1)} N_k(\alpha,n,\delta) 4^{-2k} \prod_{l=0}^{2k-1} (-2\beta - l) z^{2k} \times$$

$$\times F(k+\delta+1, 2\delta+2+2k-2n, 2\delta+2k+2; z) = (1-z)^{-\beta},$$

$$z = \frac{\eta-\xi}{\eta-\zeta},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(-\delta)}{\Gamma^2(1+\delta)\Gamma(-2\delta-1)} N_k(\alpha,n,\delta) 4^{-2k} \prod_{l=0}^{2k-1} (2\beta + l) \times$$

$$\times \frac{\Gamma(k+\delta+1)\Gamma(2n-2\delta-2k-1)}{\Gamma(-k-\delta+2n)} z_1^{-k+n} \times$$

$$\times F(k+\delta+1, -k-\delta, -k-\delta+2n; z_1) = (-1)^n (1-z_1)^{-\beta},$$

$$z_1 = \frac{\eta-\zeta}{\eta-\xi},$$

выпишем представление обобщенного решения класса *R*:

$$u_1(\xi,\eta) = \int\limits_{\eta}^{x_0} (\zeta-\eta)^{-\beta} (\zeta-\xi)^{-\beta} T_1(\zeta) d\zeta + \int\limits_{\xi}^{\eta} (\eta-\zeta)^{-\beta} (\zeta-\xi)^{-\beta} N_1(\zeta) d\zeta. ($$

11)

Аналогично можно вывести представление обобщенного решения класса *R* в области $\overline{D}_{22} = \{(\xi,\eta) : \mathrm{x}_0 \le \xi \le 1, \xi \le \eta \le 1\}$

$$u_2(\xi,\eta) = \int\limits_{x_0}^{\xi} (\eta-\zeta)^{-\beta} (\xi-\zeta)^{-\beta} T_2(\zeta) d\zeta + \int\limits_{\xi}^{\eta} (\eta-\zeta)^{-\beta} (\zeta-\xi)^{-\beta} N_2(\zeta) d\zeta,$$

(12)

где

$$N_i(\zeta) = \frac{1}{2\cos\pi\beta} T_i(\zeta) - (-1)^n \cdot 2^{4\beta-2}\gamma_2 \nu(\zeta), \quad \mathrm{i} = 1,2, \qquad (13)$$

соответственно для формул (11) и (12).

Из (11) и (12) видно, что на корректность постановки краевых задач для уравнения вида

$$L_\alpha u = u_{xx} + y u_{yy} + \alpha u_y, \quad \mathrm{y} < 0$$

в области, граница которой содержит линию параболического вырождения, существенно влияет коэффициент перед младшими членами уравнения α. Поэтому естественно следует ожидать, что от него же будут зависеть и условия склеивания решения на линии вырождения в краевых задачах для уравнения в смешанной области.

Подчиним правую часть формулы (11) условию (4), а правую часть (12) – условию (5). Получим

$$D_{\xi x_0}^{\beta-1} \equiv \int_{\xi}^{x_0} (x_0 - \zeta)^{-\beta} (\zeta - \xi)^{-\beta} N_1(\zeta) d\zeta = \psi_1\left(\frac{\xi + x_0}{2}\right),$$

(14)

$$D_{x_0\eta}^{\beta-1} \equiv \int_{x_0}^{\eta} (\eta - \zeta)^{-\beta} (\zeta - x_0)^{-\beta} N_2(\zeta) d\zeta = \psi_2\left(\frac{x_0 + \eta}{2}\right).$$

(15)

Применяя к обеим частям уравнения (14) и (15) обратные операторы $D_{\xi x_0}^{1-\beta}$ и $D_{x_0\eta}^{1-\beta}$, соответственно, получим

$$N_1(\xi) = (x_0 - \xi)^\beta \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} D_{\xi x_0}^{1-\beta} \psi_1\left(\frac{\xi + x_0}{2}\right), \qquad (16)$$

$$N_2(\xi) = (\eta - x_0)^\beta \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} D_{x_0\eta}^{1-\beta} \psi_2\left(\frac{x_0 + \eta}{2}\right). \qquad (17)$$

Из соотношения (13) найдем

$$T_1(\xi) = 2\cos\pi\beta N_1(\xi) + (-1)^n 2^{4\beta-1}\gamma_2 \cos\pi\beta \nu(\xi),$$

(18)

$$T_2(\eta) = 2\cos\pi\beta N_2(\eta) + (-1)^n 2^{4\beta-1}\gamma_2 \cos\pi\beta \nu(\eta).$$

(19)

Подставляя (18) и (19) в (10), получим основные соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенные на AB из области D_{21} и D_{22}, соответственно,

$$\tau(x) = (-1)^n 2^{4\beta-1}\gamma_2 \cos\pi\beta \int_x^{x_0} \nu(t)(t-x)^{-2\beta} dt +$$

$$+ \frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_x^{x_0} (t-x)^{-2\beta} (x_0 - t)^\beta D_{tx_0}^{1-\beta} \psi_1\left(\frac{t + x_0}{2}\right) dt, \quad 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{x}_0,$$

(20)

$$\tau(x) = (-1)^n 2^{4\beta-1}\gamma_2 \cos\pi\beta \int_x^{x_0} \nu(t)(x-t)^{-2\beta}\,dt +$$

$$+\frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}\int_x^{x_0}(x-t)^{-2\beta}(t-x_0)^{\beta} D_{x_0 t}^{1-\beta}\psi l_2\left(\frac{x_0+t}{2}\right)dt, \quad \mathrm{x}_0 \le \mathrm{x} \le 1.$$

(21)

Для получения соотношения между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенного на AB из области D_1 перейдем в уравнении (1) к пределу при $y \to +0$.

Имеем

$$\tau''(x) - \nu(x) + a(x,0)\tau(x) = 0. \qquad (22)$$

Исключая из соотношений (21) и (22) $\nu(x)$, получим интегральное уравнение относительно $\tau(x)$, эквивалентное задаче Геллерстедта

$$\tau(x) = (-1)^n 2^{4\beta-1}\gamma_2 \cos\pi\beta \int_x^{x_0} \left[\tau''(t) + a(t,0)\tau(t)\right](t-x)^{-2\beta}\,dt +$$

$$+\frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}\int_x^{x_0}(t-x)^{-2\beta}(x_0-t)^{\beta} D_{t x_0}^{1-\beta}\psi_1\left(\frac{t+x_0}{2}\right)dt, \quad 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{x}_0,$$

(23)

$$\tau(x) = (-1)^n 2^{4\beta-1}\gamma_2 \cos\pi\beta \int_x^{x_0} \left[\tau''(t) + a(t,0)\tau(t)\right](x-t)^{-2\beta}\,dt +$$

$$+\frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}\int_x^{x_0}(x-t)^{-2\beta}(t-x_0)^{\beta} D_{x_0 t}^{1-\beta}\psi l_2\left(\frac{x_0+t}{2}\right)dt, \quad \mathrm{x}_0 \le \mathrm{x} \le 1.$$

(24)

Преобразуем интеграл

$$\int_{x_0}^{x} \tau''(t)(x-t)^{-2\beta}\,dt = \tau'(t)(x-t)^{-2\beta}\Big|_{t=x_0}^{t=x} - 2\beta\int_{x_0}^{x}\tau'(t)(x-t)^{-2\beta-1}\,dt =$$

$$= -2\beta\tau(t)(x-t)^{-2\beta-1}\Big|_{t=x_0}^{t=x} + 2\beta(2\beta+1)\int_{x_0}^{x}\tau(t)(x-t)^{-2\beta-2}\,dt =$$

$$= 2\beta(2\beta+1)\int_{x_0}^{x}\tau(t)(x-t)^{-2\beta-2}\,dt$$

Аналогично

$$\int_x^{x_0} \tau''(t)(x-t)^{-2\beta-2}\,dt = 2\beta(\beta+1)\int_x^{x_0}\tau(t)(x-t)^{-2\beta-2}\,dt.$$

Уравнения (23), (24), с учетом последних двух равенств, примут вид

$$\tau(x)+\int_{x}^{x_0}K_1(x,t)\tau(t)dt=f_1(x),\quad 0\le x\le x_0, \tag{25}$$

$$\tau(x)+\int_{x_0}^{x}K_2(x,t)\tau(t)dt=f_2(x),\quad x_0\le x\le 1, \tag{26}$$

где

$$K_1(x,t)=(-1)^{n+1}2^{4\beta-1}\gamma_2\cos\pi\beta\Big[(t-x)^{-2\beta-2}2\beta(2\beta+1)+$$
$$+a(t,0)(t-x)^{-2\beta}\Big],$$
$$K_2(x,t)=(-1)^{n+1}2^{4\beta-1}\gamma_2\cos\pi\beta\Big[(x-t)^{-2\beta-2}+a(t,0)(x-t)^{-2\beta}\Big],$$

$$f_1(x)=\frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}\int_{x}^{x_0}(t-x)^{-2\beta}(x_0-t)^{-\beta}D_{tx_0}^{1-\beta}\psi_1\left(\frac{x_0+t}{2}\right)dt,$$

$$f_2(x)=\frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{-2\beta}(t-x_0)^{-\beta}D_{x_0t}^{1-\beta}\psi_2\left(\frac{x_0+t}{2}\right)dt.$$

При $-1/2<\alpha<0$ ядра $K_1(x,t)$ и $K_2(x,t)$ интегральных уравнений (25) и (26) имеют слабую особенность, а при α нецелом и $\alpha < -1/2$ они непрерывны.

В силу ограничений, наложенных на функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, правые части $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются непрерывными функциями. Таким образом, (25) и (26) являются интегральными уравнениями Волтерра второго рода относительно функции $\tau(x)$ с непрерывными правыми частями. Решения полученных уравнений существуют и единственны [4]. Следовательно, задача Геллерстедта однозначно разрешима.

Литература:

1. Мамадалиев Н.К. О двух тождествах, связанных с получением представления обобщенного решения гиперболического уравнения. // Доклады АН Уз ССР. 1998, №10. С.11-13.
2. Салахитдинов М.С., Мамадалиев Н.К. Задача Геллерстедта для уравнения параболо - гиперболического типа с характеристической линией вырождения. // Доклады АН Уз ССР. 1991, №6. С.3-5.
3. Терсенов С.А. К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения типа. // Сиб. матем. журн. 1961. Т.2, №6. С.913-935.
4. Трикоми Ф.О. Интегральные уравнения. М.: Иностранная литература, 1960.