УДК-51796

А.О.Акбаров – ТГПУ, Ташкент Узбекистан
A.O. Akbarov – TSPU, Tashkent Uzbekistan

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В работе исследуется локальная задача для вырождающегося уравнения гиперболического типа третьего порядка.

Ключевые слова: задача, уравнения третьего порядка, переменные, решения, функция.

ON A PROBLEM FOR A DEGENERATE HYPERBOLIC TYPE OF THIRD ORDER

In this paper, we study the local problem for a degenerate hyperbolic equation of the third order.

Keywords: task, third-order equations, variables, solutions, function.

В данной работе рассматривается одна локальная задача для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((-y)^m u_{xx} - u_{yy}\right) = 0 \qquad (1)$$

где $m = const > 0$.

Пусть $\Omega -$ конечная область в плоскости переменных x и y, ограниченная при $y < 0$ характеристиками :

$$A_1C_2: \quad x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = -1 \ ; \qquad B_1C_1 \ : \ x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = -q$$

$$A_2C_2 \ : \quad x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1 \quad ; \qquad B_2C_1 \ : \ x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = q$$

$(0 < q < 1)$, уравнения (1) ,

где $A_1(-1;0)$, $A_2(1;0)$, $B_1(-q;0)$, $B_2(q;0)$, $C_1\left(0;-\left(\frac{m+2}{2}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)$,

$C_2\left(0,-\left[\frac{q(m+2)}{2}\right]^{\frac{2}{m+2}}\right)$.

В ведём обозначения :

$\mathrm{I}_{11} = \{x;-1 < x < -q\}$; $\qquad \mathrm{I}_{21} = \{x;-q < x < 0\}$;

$\mathrm{I}_{12} = \{x;q < x < 1\}$; $\qquad \mathrm{I}_{22} = \{x;0 < x < 1\}$.

$$E_1\left(-\frac{1+q}{2};-\left[\frac{1-q}{4}(m+2)\right]^{\frac{2}{m+2}}\right); \qquad E_2\left(\frac{1+q}{2};-\left[\frac{1-q}{4}(m+2)\right]^{\frac{2}{m+2}}\right)$$

$$F_1\left(\frac{q-1}{2};-\left[\frac{1+q}{4}(m+2)\right]^{\frac{2}{m+2}}\right) \quad ; \qquad F_2\left(-\frac{q-1}{2};-\left[\frac{1+q}{4}(m+2)\right]^{\frac{2}{m+2}}\right)$$

В области Ω из точки B_2, C_1 проведём характеристики, параллельные характеристикам A_1C_2 до пересечения их с A_2C_2 в точках E_2, F_2 соответственно. Таким же образом из точек B_1, C_1 проведём, характеристики, параллельные характеристикам A_2C_2 до пересечения их с A_1C_2 в точках E_1, F_1 соответственно. Тогда Ω разбивается на следующие части : характеристические треугольники:

$$\Omega_{11} = A_1B_1E_1 \quad ; \qquad \Omega_{21} = A_2B_2E_2$$

и четырёхугольники :

$$\Omega_{21} = B_1E_1F_1C_1 \; ; \quad \Omega_{22} = B_2E_2F_2C_2 \; ; \; \Omega_{23} = F_1C_1F_2C_2 \; .$$

В области Ω исследуем следующую задачу :

Задача I. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющие условиям:

1) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega})$

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области $\Omega \setminus (x+y=q) \setminus (x+y=-q)$

3) $u_x, u_y \in C(A_2C_2), \; u_y \in C(A\,B_1 \cup A_2B_2)$, причём $u_y(x,0)$ может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $x \to \pm q$ а , при $x \to \pm 1$ ограничена.

4) удовлетворяет краевым условиям :

$$u_y\big|_{y=0} = \nu_j(x); \qquad x \in \mathrm{I}_{1j} \; ; \quad (j=1,2) \, ,$$

$$u\big|_{A_2C_2} = \varphi(x) \; ; \qquad x \in \bar{\mathrm{I}}_{22} \; ;$$

$$u\big|_{B_1C_1} = \psi(x) \; ; \qquad x \in \bar{\mathrm{I}}_{21} \; ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{A_2C_2} = \mu(x) \; ; \quad x \in \mathrm{I}_{22} \; ,$$

где $\nu_j(x), (j=1,2), \mu(x), \psi(x)$, $\varphi(x)$– заданные достаточно гладкие функции.

Решение задачи I для уравнения (1) области Ω представимо в виде $[1]$:

$$u(x,y) = Z(x,y) + \omega(y) \; ; \qquad (2)$$

где $Z(x,y)$-дважды непрерывно дифференцируемая функция , и регулярное решение уравнения

$$(-y)^m Z_{xx} - Z_{yy} = 0 \; , \qquad (3)$$

а $\omega(y)$- произвольная дважды непрерывная дифференцируемая функция , причём

$$\omega(y) = \begin{cases} \omega_1(y) & ; \quad -\left[\frac{1-q}{4}(m+2)\right]^{\frac{2}{m+2}} \le y \le 0 \\ \omega_2(y) & ; \quad -\left[\frac{1+q}{4}(m+2)\right]^{\frac{2}{m+2}} \le y \le -\left[\frac{1-q}{4}(m+2)\right]^{\frac{2}{m+2}} \\ \omega_3(y) & ; \quad -\left[\frac{q(m+2)}{2}\right]^{\frac{2}{m+2}} \le y \le -\left[\frac{1+q}{4}(m+2)\right]^{\frac{2}{m+2}} \end{cases}$$

При исследование задачи I без ограничивая общности предположим

$$\omega(0) = \omega'(0) = 0 \quad , \qquad (4)$$

следовательно, в силу (2) и (4) задача I сведаётся к задаче нахождения регулярного решения уравнения (3) в области Ω .

При определённых условиях для заданных функций доказывается однозначная разрешимость задачи I .

Литература:

1. М. С. Салахитдинов. Уравнения смешанно-составного типа.Ташкент .ФАН 1974 156 с.