

**ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ОТВЕРСТИЕМ В ВИДЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКА, РАСПОЛОЖЕННОГО В ЦЕНТРЕ ПОД ПЛИТОЙ**

*Приводится численная реализация задачи изгиба прямоугольной плиты на упругом основании с отверстием в виде прямоугольника, расположенного в центре под плитой. Произведен подробный анализ полученных результатов.*

*Ключевые слова: прямоугольные плиты, задачи изгиба, изгибающие моменты, бесконечные полосы.*

**NUMERICAL REALIZATION OF THE PROBLEM OF BENDING A RECTANGULAR PLATE ON AN ELASTIC BASE WITH A HOLE IN THE FORM OF A RECTANGLE LOCATED IN THE CENTER BELOW THE PLATE**

*Numerical realization of the problem of bending a rectangular plate on an elastic base with a hole in the form of a rectangle located in the center under the plate is given. There is made a detailed analysis of the results.*

*Keywords: rectangular plates, bending problems, bending moments, infinite stripes.*

В работе [4] получено аналитическое решение задачи об изгибе бесконечной плиты на упругом винклеровском основании с неполным контактом в виде прямоугольника, расположенного в центре под плитой (рис.1.) на основе метода обобщенных решений и интегральных преобразований Фурье [1,2,3]., где выражения прогибов, изгибающих моментов и приведенных поперечных сил имеют вид:

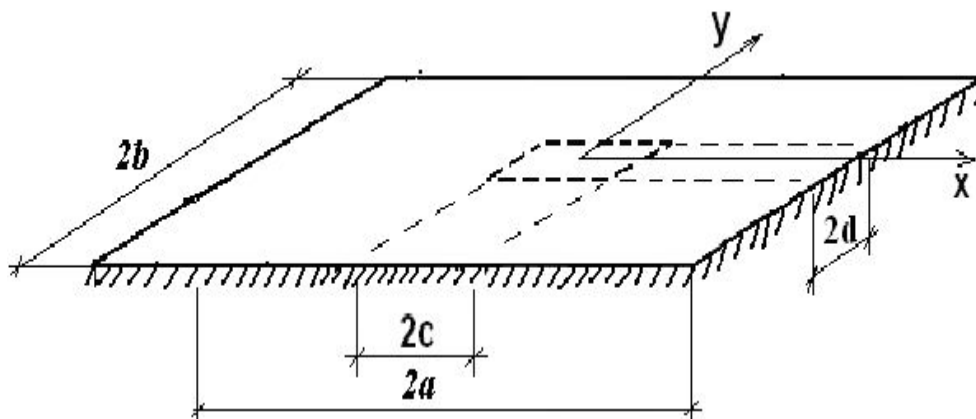


Рис. 1. Расчетная схема прямоугольной плиты на упругом основании с отверстием в виде прямоугольника расположенного в центре под плитой

$$\begin{aligned}
W(x, y) = & W_{\infty}(x, y) + \frac{2}{\pi} \int_0^c \int_0^d W(t, \lambda) \int_0^{\infty} k(x, \eta, t) \cos \eta y \cos \eta \lambda d\eta dt d\lambda + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_1(\eta) \beta_{01}(\eta, x, a) \cos \eta y d\eta + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_2(\eta) \beta_{02}(\eta, x, a) \cos \eta y d\eta + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_3(\xi) \beta_{03}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_4(\xi) \beta_{04}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
M_x(x, y) = & M_{x\infty}(x, y) + \frac{2}{\pi} \int_0^c \int_0^d W(t, \lambda) \int_0^{\infty} k_{Mx}(x, \eta, t) \cos \eta y d\eta dt d\lambda - \\
& - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_1(\eta) \beta_{41}(\eta, x, a) \cos \eta y d\eta - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_2(\eta) \beta_{42}(\eta, x, a) \cos \eta y d\eta - \\
& - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_3(\xi) \beta_{43}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_4(\xi) \beta_{44}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
M_y(x, y) = & M_{y\infty}(x, y) + \frac{2}{\pi} \int_0^c \int_0^d W(t, \lambda) \int_0^{\infty} k_{My}(x, \eta, t) \cos \eta y d\eta dt d\lambda - \\
& - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_1(\eta) \beta_{51}(\eta, x, a) \cos \eta y d\eta - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_2(\eta) \beta_{52}(\eta, x, a) \cos \eta y d\eta - \\
& - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_3(\xi) \beta_{53}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_4(\xi) \beta_{54}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
N_x(x, y) = & M_{\infty x}(x, y) - \frac{2}{\pi} \int_0^c \int_0^d W(t, \lambda) \int_0^{\infty} k_{Nx}(x, \eta, t) \cos \eta y d\eta dt d\lambda + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_1(\eta) \beta_{61}(\eta, x, a) \cos \eta y d\eta + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_2(\eta) \beta_{62}(\eta, x, a) \cos \eta y d\eta + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_3(\xi) \beta_{63}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_4(\xi) \beta_{64}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
N_y(x, y) = & N_{\infty y}(x, y) - \frac{2}{\pi} \int_0^c \int_0^d W(t, \lambda) \int_0^{\infty} k_{Ny}(x, \eta, t) \sin \eta y d\eta dt d\lambda + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_1(\eta) \beta_{71}(\eta, x, a) \sin \eta y d\eta + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_2(\eta) \beta_{72}(\eta, x, a) \sin \eta y d\eta + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_3(\xi) \beta_{73}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_4(\xi) \beta_{74}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi
\end{aligned} \tag{5}$$

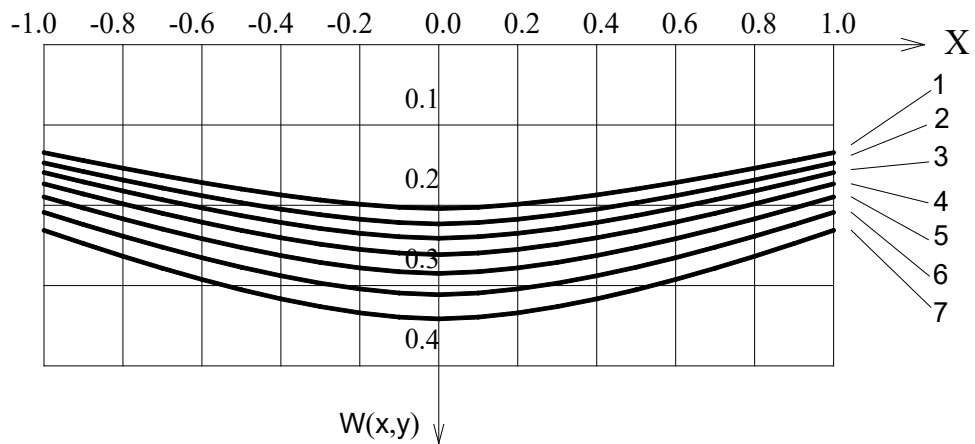
Численная реализация произведена в системе MATLAB. Результаты расчета приведены на рис. 2 5 и таблицах 1 4

Таблица 1

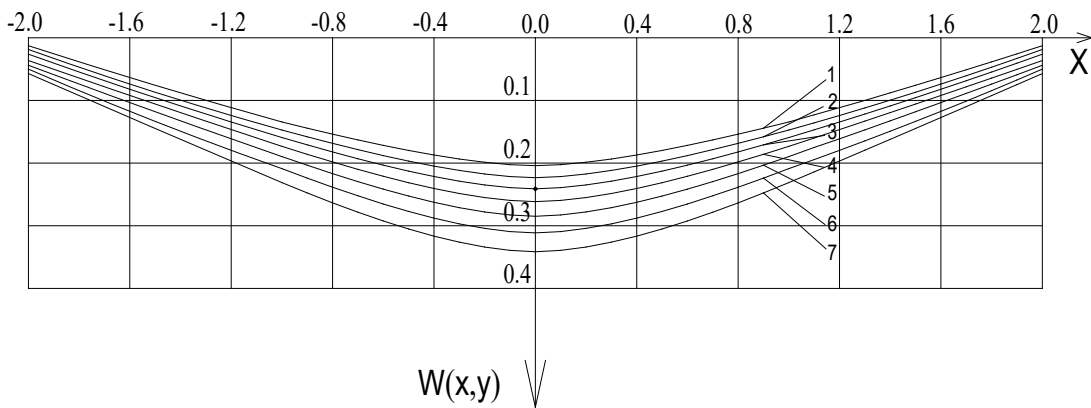
Значения прогибов прямоугольной плиты на упругом основании с неполным контактом в виде прямоугольника с размерами плиты  $a=3$  и  $b=2$  по оси  $X=0$  1.0.

x	y	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
c00	d04	0,2041	0,2025	0,1987	0,1935	0,1871	0,1798
c01	d04	0,2233	0,2215	0,2174	0,2117	0,2049	0,1968
c02	d04	0,2411	0,2392	0,2349	0,2289	0,2214	0,2129
c03	d04	0,2615	0,2595	0,2550	0,2485	0,2405	0,2313
c04	d04	0,2849	0,2828	0,2780	0,2712	0,2626	0,2526

c05	d04	0,3114	0,3093	0,3042	0,2970	0,2878	0,2772
c06	d04	0,3415	0,3393	0,3340	0,3262	0,3166	0,3052
x	y	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
c00	d04	0,1798	0,1717	0,1630	0,1538	0,1443	0,1344
c01	d04	0,1968	0,1881	0,1785	0,1685	0,1580	0,1472
c02	d04	0,2129	0,2033	0,1931	0,1822	0,1709	0,1592
c03	d04	0,2313	0,2210	0,2100	0,1982	0,1860	0,1733
c04	d04	0,2526	0,2416	0,2296	0,2169	0,2034	0,1896
c05	d04	0,2772	0,2653	0,2522	0,2385	0,2240	0,2088
c06	d04	0,3052	0,2924	0,2784	0,2635	0,2476	0,2312



**Рис. 2.** 1 ÷ 7-Эпюры прогибов прямоугольной плиты на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде прямоугольника, расположенного в центре под плитой, с размерами плиты,  $a=3$  и  $b=2$ , по оси  $X=0 \div 1.0$ .



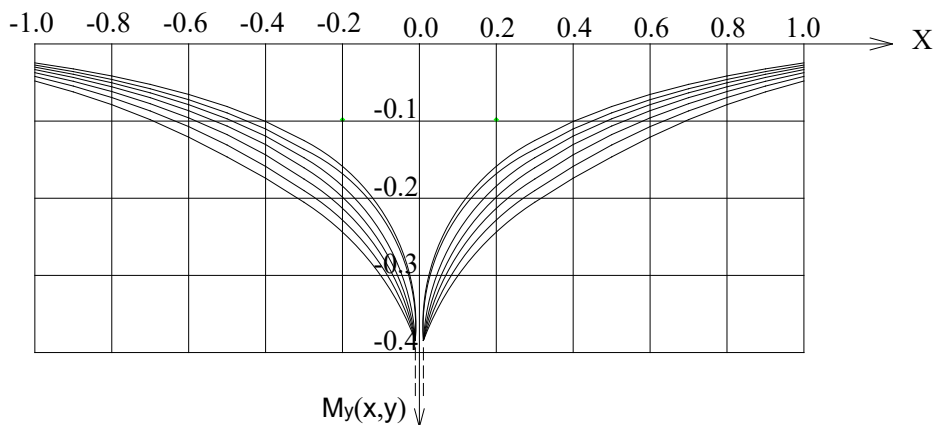
**Рис. 3.** 1

7-Эпюра прогибов прямоугольной плиты на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде прямоугольника, расположенного в центре под плитой, с размерами плиты  $a=3$  и  $b=2$ , по оси  $X=0 \div 2.0$ .

Таблица 2

Значения прогибов прямоугольной плиты на упругом основании с неполным контактом в виде прямоугольника с размерами плиты  $a=3$  и  $b=2$  по оси  $X=0 \div 2.0$ .

x	y	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
c00	d04	0,2041	0,2025	0,1987	0,1935	0,1871	0,1798
c01	d04	0,2233	0,2215	0,2174	0,2117	0,2049	0,1968
c02	d04	0,2411	0,2392	0,2349	0,2289	0,2214	0,2129
c03	d04	0,2615	0,2595	0,2550	0,2485	0,2405	0,2313
c04	d04	0,2849	0,2828	0,2780	0,2712	0,2626	0,2526
c05	d04	0,3114	0,3093	0,3042	0,2970	0,2878	0,2772
c06	d04	0,3415	0,3393	0,3340	0,3262	0,3166	0,3052
x	y	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
c00	d04	0,1798	0,1717	0,1630	0,1538	0,1443	0,1344
c01	d04	0,1968	0,1881	0,1785	0,1685	0,1580	0,1472
c02	d04	0,2129	0,2033	0,1931	0,1822	0,1709	0,1592
c03	d04	0,2313	0,2210	0,2100	0,1982	0,1860	0,1733
c04	d04	0,2526	0,2416	0,2296	0,2169	0,2034	0,1896
c05	d04	0,2772	0,2653	0,2522	0,2385	0,2240	0,2088
c06	d04	0,3052	0,2924	0,2784	0,2635	0,2476	0,2312
x	y	1.0000	1.1000	1.2000	1.3000	1.4000	1.5000
c00	d04	0,1344	0,1230	0,1115	0,1000	0,0878	0,0758
c01	d04	0,1472	0,1358	0,1240	0,1120	0,0996	0,0869
c02	d04	0,1592	0,1469	0,1344	0,1217	0,1088	0,0950
c03	d04	0,1733	0,1600	0,1465	0,1330	0,1194	0,1057
c04	d04	0,1896	0,1750	0,1613	0,1470	0,1326	0,1181
c05	d04	0,2088	0,1944	0,1796	0,1646	0,1492	0,1335
c06	d04	0,2312	0,2140	0,1968	0,1795	0,1621	0,1448
x	y	1.5000	1.6000	1.7000	1.8000	1.9000	2.0000
c00	d04	0,0758	0,0635	0,0511	0,0385	0,0256	0,0127
c01	d04	0,0869	0,0739	0,0606	0,0469	0,0329	0,0186
c02	d04	0,0950	0,0822	0,0685	0,0547	0,0406	0,0262
c03	d04	0,1057	0,0921	0,0782	0,0644	0,0504	0,0364
c04	d04	0,1181	0,1035	0,0888	0,0739	0,0590	0,0440
c05	d04	0,1335	0,1174	0,1011	0,0844	0,0674	0,0500
c06	d04	0,1448	0,1273	0,1098	0,0923	0,0747	0,0571

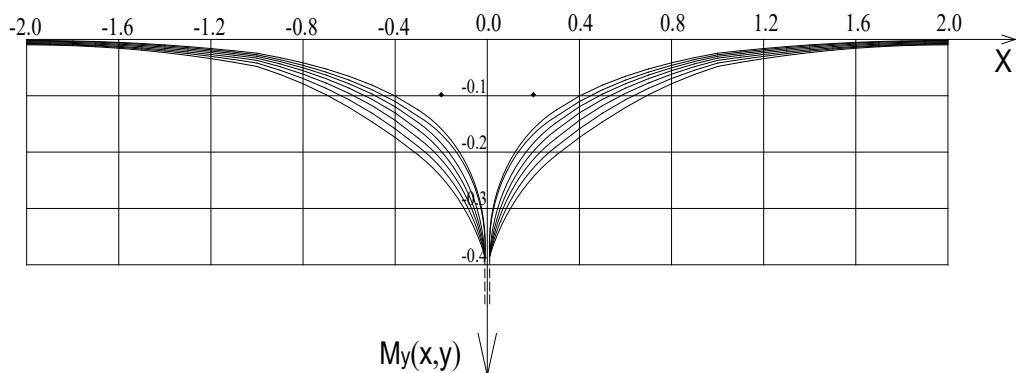


**Рис. 4.** Эпюры изгибающих моментов  $M_y(x,y)$  прямоугольной плиты на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде прямоугольника, расположенного в центре под плитой, с размерами плиты  $a=3$  и  $b=2$  по оси  $X=0 \div 1.0$ .

Таблица 3

Значения изгибающих моментов  $M_y(x,y)$  прямоугольной плиты с прямоугольным отверстием с размерами плиты  $a=3$  и  $b=2$  по оси  $X=0 \div 1.0$ .

x	y	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
c00	d04	$\infty$	-0,2141	-0,1593	-0,1252	-0,0948	-0,0749
c01	d04	$\infty$	-0,2293	-0,1726	-0,1366	-0,1082	-0,0831
c02	d04	$\infty$	-0,1431	-0,1852	-0,1475	-0,1178	-0,0912
c03	d04	$\infty$	-0,2573	-0,1996	-0,1605	-0,1299	-0,1021
c04	d04	$\infty$	-0,2715	-0,2141	-0,1751	-0,1433	-0,1138
c05	d04	$\infty$	-0,2859	-0,2288	-0,1901	-0,1569	-0,1259
c06	d04	$\infty$	-0,3004	-0,2438	-0,2052	-0,1701	-0,1371
x	y	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
c00	d04	-0,0749	-0,0614	-0,0552	-0,0352	-0,0209	-0,0215
c01	d04	-0,0831	-0,0654	-0,0574	-0,0445	-0,0323	-0,0245
c02	d04	-0,0893	-0,0772	-0,0580	-0,0460	-0,0358	-0,0273
c03	d04	-0,0970	-0,0784	-0,0633	-0,0503	-0,0393	-0,0300
c04	d04	-0,1064	-0,0865	-0,0696	-0,0555	-0,0434	-0,0332
c05	d04	-0,1175	-0,0958	-0,0774	-0,0617	-0,0484	-0,0372
c06	d04	-0,1310	-0,1061	-0,0868	-0,0494	-0,0546	-0,0420



**Рис. 5** Эпюры изгибающих моментов  $M_y(x,y)$  прямоугольной плиты на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде прямоугольника, расположенного в центре под плитой, с размерами плиты  $a=3$  и  $b=2$  по оси  $X=0 \div 2.0$ .

Таблица 4

Значения изгибающих моментов  $M_y(x,y)$  прямоугольной плиты с  
прямоугольным отверстием с размерами плиты  $a=3$  и  $b=2$  по оси  $X=0 \div 2.0$ .

x	y	0.000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
c00	d04	$\infty$	-0,2141	-0,1593	-0,1252	-0,1004	-0,0811
c01	d04	$\infty$	-0,2293	-0,1726	-0,1366	-0,1101	-0,0893
c02	d04	$\infty$	-0,1431	-0,1852	-0,1475	-0,1194	-0,0970
c03	d04	$\infty$	-0,2573	-0,1996	-0,1605	-0,1304	-0,1064
c04	d04	$\infty$	-0,2715	-0,2141	-0,1751	-0,1437	-0,1175
c05	d04	$\infty$	-0,2859	-0,2288	-0,1901	-0,1587	-0,1310
c06	d04	$\infty$	-0,3004	-0,2438	-0,2052	-0,1740	-0,1464
x	y	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
c00	d04	-0,0811	-0,0654	-0,0574	-0,0445	-0,0323	-0,0245
c01	d04	-0,0893	-0,0722	-0,0580	-0,0460	-0,0358	-0,0273
c02	d04	-0,0970	-0,0784	-0,0633	-0,0503	-0,0393	-0,0300
c03	d04	-0,1064	-0,0865	-0,0696	-0,0555	-0,0434	-0,0332
c04	d04	-0,1175	-0,0958	-0,0774	-0,0617	-0,0484	-0,0372
c05	d04	-0,1310	-0,1071	-0,0868	-0,0694	-0,0546	-0,0420
c06	d04	-0,1464	-0,1208	-0,0981	-0,0787	-0,0621	-0,0480
x	y	1.0000	1.1000	1.2000	1.3000	1.4000	1.5000
c00	d04	-0,0245	-0,0201	-0,0162	-0,0127	-0,0098	-0,0073
c01	d04	-0,0273	-0,0225	-0,0183	-0,0145	-0,0113	-0,0087
c02	d04	-0,0300	-0,0251	-0,0207	-0,0169	-0,0135	-0,0107
c03	d04	-0,0332	-0,0281	-0,0234	-0,0194	-0,0158	-0,0128
c04	d04	-0,0372	-0,0316	-0,0267	-0,0223	-0,0184	-0,0151

c05	d04	-0,0420	-0.0357	-0.0300	-0.0250	-0.0207	-0.0170
c06	d04	-0,0480	-0.0406	-0.0341	-0.0283	-0.0233	-0.0191
x	y	1.5000	1.6000	1.7000	1.8000	1.9000	2.0000
c00	d04	-0.0073	-0.0053	-0.0037	-0.0027	-0.0021	-0.0020
c01	d04	-0.0087	-0.0065	-0.0049	-0.0038	-0.0033	-0.0032
c02	d04	-0.0107	-0.0084	-0.0066	-0.0054	-0.0046	-0.0044
c03	d04	-0.0128	-0.0103	-0.0084	-0.0070	-0.0061	-0.0058
c04	d04	-0.0151	-0.0124	-0.0103	-0.0087	-0.0076	-0.0072
c05	d04	-0.0170	-0.0139	-0.0116	-0.0098	-0.0087	-0.0083
c06	d04	-0.0191	-0.0157	-0.0130	-0.0111	-0.0100	-0.0096

### **Анализ результатов расчета задачи изгиба прямоугольной плиты на упругом основании с отверстием в виде прямоугольника расположенного в центре под плитой**

Анализ результатов расчета прямоугольной плиты на упругом основании с отверстием в виде прямоугольника расположенного в центре под плитой (рис. 1) показывает, что с увеличением размера отверстия в виде прямоугольника вдоль оси X ( $C=0 \div 0.6$ ) при постоянном размере  $d=0.4$  вдоль оси Y, прогибы  $W(x,y)$  увеличиваются. Если при  $C=0$ , т.е. в случае полного контакта плиты с основанием, прогибы в центре прямоугольной плиты равны 0.2041, то при  $C=0.6$  они равны 0.3415 это 1.67 раза больше чем при полном контакте с основанием, прогибы в центре прямоугольной плиты равны 0.2041, то при  $C=0.6$  они равны 0.3415. Это в 1.67 раза больше чем при полном контакте с основанием (рис. 2, 3 табл. 1, 2).

Изгибающие моменты  $M_x(x,y)$  и  $M_y(x,y)$  в центре бесконечной полосы равны бесконечности (рис 4, 5 и табл 3, 4), если при  $X=0.1$  и  $C=0$ ,  $M_y(x,y)=-0.2141$ , то при  $C=0.6$   $M_y(x,y)=-0.3004$ , т.е. увеличиваются по абсолютной величине в 1.4 раза (рис 4, 5 и табл 3, 4).

Следует отметить, что для свободно лежащей прямоугольной плиты на краях плиты (рис. 4.1.1) изгибающие моменты  $M_y(x,y)$  равны нулю (рис. 4, 5 и табл. 3, 4), что подтверждает точность результатов расчета и достоверность полученных аналитических решений.

Полученные результаты расчета могут быть использованы в практике проектирования фундаментов зданий и сооружений и в процессе эксплуатации с учетом их реальной работы.

#### Литература:

1. Градштейн И.С., Рыжик И.И. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
2. Травуш В.И. Об одном методе решения задач изгиба конструкций, лежащих на винклеровском упругом основании. Сб. тр.: «Вопросы архитектуры и строительства зданий для зрелищ, спорта и учреждений культуры» М., 1976, №4, с.83-89
3. Травуш В.И., Маруфий А.Т. Изгиб различных схем плит на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием. –М.: АСВ, СНГ, 2003 – 208с.
4. Маруфий А.Т., Джусуев У.С. Алгоритмизация задачи изгиба прямоугольной плиты на упругом основании с отверстием в виде прямоугольника, расположенного в центре под плитой. Известия ОшГУ, №2, Ош 2005 с. 13-16.